****

**Recueil d’activités**

**de modélisation**

Auteurs : Bernadette Janvier et François Pelletier

Développé dans le cadre du cours Didactique de la variable et des fonctions MAT3225 (2003)

**Projet de recherche collaborative (UQAR, UQAM, Université de Sherbrooke, CSDD, CSBE)**

**Projet de recherche collaborative (UQAR, UQAM, Université de Sherbrooke, CSDD, CSBE)**

2013-2014

Co-construction, mise à l'essai, analyse et partage de situations didactiques visant à favoriser la transition arithmétique/algèbre

**TABLE DES MATIÈRES**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Présentation du recueil** | | **1** | |
| **Partie 1 - Guide d'accompagnement** | | **2** | |
| Approche pédagogique | | 3 | |
| Principes pédagogiques | | 5 | |
| Modes de représentation | | 11 | |
| Expérience | | 11 | |
| Verbal | | 13 | |
| Schéma | | 13 | |
| Tableau de valeurs | | 13 | |
| Graphique | | 14 | |
| Formel | | 17 | |
| Les traductions | | 18 | |
| Attention! Difficultés à l'horizon! | | 22 | |

**Partie 2 - Situations détaillées 23**

Situation 1 - Les ombres 25

Situation 2 - L'eau qui bout 33

Situation 3 - L'étirement d'un ressort 39

Situation 4 - La bouteille 45

Situation 5 - Le ballon qu'on gonfle 51

Situation 6 - La course en taxi 57

Situation 7 - Le trait sur le mur 63

Situation 8 - Le cercle 73

Situation 9 - La facture d'électricité 81

Situation 10 - Promenade en montagne 89

Situation 11 - La température et l'altitude 97

Situation 12 - Le drapeau du scout 101

Situation 13- La chèvre 115

Situation 14 - Le vol Paris-Montréal 121

**Partie 3 - Situations survolées 125**

Situation 15 - La location d'un outil 127

Situation 16 - La tasse de café 129

Situation 17 - Le degré de viscosité 131

Situation 18 - Le parcomètre 133

Situation 19 - La population de bactéries 135

Situation 20 - Le plongeur 137

**Index schématique des variables didactiques 139**

**PRÉSENTATION DU RECUEIL**

Dès  la  deuxième  secondaire,  les  élèves  sont  amenés  à  analyser  les  différentes  situations  qui  leur  sont  soumises  afin  de  résoudre

différents  types  de  problèmes. Pour  ce  faire,  les  élèves  sont  initiés  à  différents  modes  de  représentation  qui  ont  tous  et  chacun  leurs

caractéristiques  distinctives.

Ce  recueil  se  veut  un  guide  d'accompagnement  pour  les  enseignants  et  les  futurs  enseignants  dans  leur  enseignement  de  la

modélisation. Nous  y  retrouvons  deux  principales  parties  :  un  répertoire  de  situations  à  travailler  en  classe  et  un  document

d'accompagnement  qui  explique  en  détails  tous  les  aspects  qui  sont  impliqués  dans  une  tâche  de  modélisation.

Dans  la  majorité  des  situations  qui  vous  sont  proposées  dans  notre  répertoire,  vous  trouverez  des  exemples  d'utilisation  de  cette

situation  en  classe.  Vous  y  verrez  parfois  des  analogies  et  parfois  vous  découvrirez  de  grandes  distinctions  entre  les  différentes  situations.

La  variété  des  approches  a  pour  but  de  vous  sensibiliser  aux  différentes  possibilités  qui  s'offrent  à  vous  en  tant  qu'enseignant  et  vous  pourrez

ainsi  retiré  de  bonnes  habitudes  qui  vont  favoriser  l'apprentissage  des  élèves.

Suite  à  l'analyse  des  différentes  situations  proposées  dans  notre  répertoire  et  à  une  lecture  du  document  d'accompagnement  que  nous

vous  proposons,  vous  serez  aptes  à  pouvoir  sélectionner  d'autres  situations  dans  les  manuels,  la  vie  courante  ou  peut-être  même  votre

imagination  et  à  identifier  les  différentes  variables  didactiques  à  considérer  lorsque  vous  les  soumettrez  à  vos  étudiants.

Ce  document  n'est  qu'une  première  ébauche  et  est  évidemment  destiné  à  être  amélioré  au  fil  du  temps.  Pour  cette  raison,  vous

retrouverez  plusieurs  espaces  pour  noter  vos  réflexions  personnelles  sur  le  contenu  de  même  que  certaines  suggestions  d'améliorations.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 1

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  foncti

**APPROCHE PÉDAGOGIQUE**

L'approche  pédagogique  préconisée  dans  ce  recueil  se  veut  diversifiée  et  très  différentes  de  celle  qu'on  retrouve  dans  les  manuels  scolaires.

Il  y  a  quatre  principales  facettes  à  notre  approche  pédagogique:

**I.** **Les   élèves   ont   l'initiative   de   pensée**

Contrairement  à  ce  qui  se  produit  dans  plusieurs  classes,  l'enseignement  n'est  pas  à  sens  unique  en  ce  sens  que  les  éléments

d'apprentissages  ne  font  pas  seulement  passer  de  l'enseignant  à  l'élève. Nous  croyons  en  effet  que  les  élèves  sont

suffisamment  brillants  pour  avoir  des  idées  par  eux-mêmes  sur  la  façon  de  résoudre  un  problème.  Ainsi,  c'est  à  eux  d'élaborer

des  pistes  de  solutions  et  l'enseignant  ne  se  veut  qu'un  guide  qui  s'assure  que  les  élèves  ne  s'écartent  pas  du  but  qu'ils  visent.

**II.** **L'enseignant   tire   partie   des   productions   des   élèves**

Il  ne  suffit  pas  de  laisser  aux  élèves  avoir  l'initiative  de  penser,  il  faut  aussi  leur  permettre  d'apprendre  de  leurs  erreurs  et

savoir  tirer  partie  de  leurs  différentes  réalisations.  Par  exemple,  dans  la  situation*Le  vol  Paris-Montréal*,  il  y  a  six  principaux

types  de  graphiques  que  les  élèves  peuvent  produire.  En  les  faisant  parler  sur  leur  interprétation  de  la  situation,  l'enseignant

peut  mettre  en  évidence  les  lacunes  de  l'analyse  de  l'élève  et  lui  indiquer  en  quoi  il  s'éloigne  du  problème  initial.

**III.** **La   démarche   scientifique   est   très   utile,   même   en   mathématiques!**

Les  élèves  ne  sont  pas  nécessairement  familiers  avec  toutes  les  situations  qui  leur  sont  proposées  dans  ce  recueil.  Afin  de

mieux  percevoir  la  situation,  il  leur  faudra  parfois  avoir  recours  à  une  expérience.  Dans  ce  cas  précis,  nous  allons  proposons

une  démarche  utilisant  l'approche  scientifique  en  ce  sens  que  les  élèves  vont  commencer  par  faire  des  observations  et  émettre

une  hypothèse. L'expérimentation  leur  permettra  par  la  suite  d'obtenir  des  résultats  et  de  faire  des  observations  qui  leur

permettront  de  valider  leurs  différentes  hypothèses  et  d'en  arriver  à  une  conclusion.  C'est  le  cas  notamment  pour  les  situations

suivantes:*Les  ombres,  L'eau  qui  bout,  Le  trait  sur  le  mur,  Le  ballon  qu'on  gonfle,  Le  drapeau  du  scout,  La  promenade  en*

*montagne*  et*Le  degré  de  viscosité*.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 3

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**IV.** **L'enseignement   coopératif**

Il  s'agit  d'un  mode  d'apprentissage  où  les  élèves  travaillent  en  petits  groupes  hétérogènes  (élèves  de  forces  différentes)  tout  en

s'assurant  que  la  participation  de  tous  soit  nécessaire.  Il  vise  à  créer  une  certaine  interdépendance  entre  les  élèves.  De  plus,

l'apprentissage  coopératif  permet  une  confrontation  des  points  de  vue  et  des  stratégies  d'apprentissage  qui  est  bénéfique  pour

l'ensemble  des  élèves.

Voyons  maintenant  concrètement  de  quelle  façon  l'apprentissage  coopératif  est  intégré  à  l'une  des  situations  proposées  dans  ce

recueil,*la  course  en  taxi*:

→  Lorsque  l'enseignant  demande  à  certains  étudiants  de  venir  présenter  leur  modélisation  graphique  à  l'avant  de  la

classe  afin  d'expliquer  leur  interprétation  de  la  situation,  nous  retrouvons  une  forme  d'enseignement  coopératif

puisque  les  élèves  sont  sensibilisés  au  fait  qu'il  peut  y  avoir  différentes  interprétations  d'une  même  situation  et  que

chaque  interprétation  aura  une  représentation  graphique  qui  lui  est  propre.  Tous  les  élèves  se  donnent  donc  la

peine  de  réfléchir  sur  le  travail  qui  a  été  fait  par  leurs  pairs.

→  Un  des  prolongements  proposé  pour  cette  situation  est  de  demander  à  chaque  élève  d'inventer  le  déroulement  de  sa

propre  course  en  taxi  et  de  la  décrire  afin  qu'un  autre  élève  puisse  en  faire  la  représentation  en  mode  graphique.

Dans  ce  cas-là,  les  deux  élèves  peuvent  confronter  leur  perception  de  la  situation  puisque  l'élève  qui  décrit  la

course  en  taxi  n'est  pas  nécessairement  en  accord  avec  le  graphique  produit  par  son  coéquipier.

**Pour   en   savoir   plus   sur   l'enseignement   coopératif…**

Sites web

 Coopération-Mosaïque  :  http://www.cooperation-mosaique.com/index.html

 L'apprentissage  coopératif  :  http://www.csdm.qc.ca/st-gregoire/cp/pdf/coop.pdf

Livre

HOWDEN,  Jim  et  H.  Martin,*La  coopération  au  fil  des  jours*,  Montréal,  Chenelière/McGraw-Hill,  1997,  264  pages.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 4

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**PRINCIPES PÉDAGOGIQUES**

Dans  ce  recueil,  nous  insistons  sur  certains  éléments  dans  l'utilisation  des  situations  proposées.  Certaines  personnes  pourraient  être  tentées

de  croire  que  «nous  nous  attardons  sur  des  détails  insignifiants»,  mais  ce  n'est  réellement  pas  le  cas.  Lorsque  nous  insistons  sur  certains

aspects,  c'est  que  nous  les  avons  définis  comme  des  principes  pédagogiques  importants  qui  sont  à  la  base  même  du  travail  qui  sera  fait  avec

les  élèves.

**La   verbalisation**

Qu'entend-on  au  juste  par  verbalisation? Il  s'agit  en  quelque  sorte  de  la  façon  dont  on  explique  notre  façon  de  penser  pour  la

communiquer  aux  autres.  Dans  ce  recueil,  on  retrouve  trois  types  de  verbalisations:

1º  La  verbalisation  de  l'élève  :  il  s'agit  d'une  façon  instinctive  qu'a  l'élève  de  décrire  les  choses  en  ses  propres-mots.

2º  La  verbalisation  transitoire:  c'est  une  verbalisation,  en  termes  simples,  que  suggère  l'enseignant  afin  de  préciser  l'idée  de

l'élève  de  deuxième  secondaire.

3º  La  verbalisation  idéale:  c'est  celle  qui  utilise  le  vocabulaire  consacré  aux  situations  fonctionnelles;  elle  devrait  être  mise  en

place  à  compter  de  la  troisième  secondaire.

L'enseignant  est  le  maître  d'œuvre  du  passage  entre  ces  différents  types  de  verbalisations.  Il  doit  amener  l'élève  à  améliorer  son

vocabulaire  sans  le  brusquer.  En  ce  sens,  l'enseignant  doit  lui-même  faire  extrêmement  attention  aux  propos  qu'il  prononce.

Le  but  principal  de  la  verbalisation  est  de  se  faire  comprendre.  Il  s'agit  donc  d'être  le  plus  explicite  possible.  Ainsi,  pour  signifier

que  la  situations  est  croissante  (verbalisation  idéale),  on  ne  dira  pas  que  les  grandeurs  varient  dans  le  même  sens  (verbalisation  des

manuels)  mais  plutôt  que  lorsque  la  grandeur  prédominante  augmente,  la  grandeur  conséquente  augmente  également.

Parfois,  la  verbalisation  permet  à  l'élève  de  signifier,  de  manière  involontaire,  quelle  est  sa  véritable  interprétation  de  la  situation.  Par

exemple,  dans  la  situation  de*la  bouteille*,  un  élève  pourrait  vouloir  choisir  le  niveau  comme  grandeur  prédominante  et  son  discours

permet  de  constater  que  c'est  plutôt  le  volume  de  liquide  qu'il  regarde  en  premier.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 5

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Faire   des   liens   avec   d'autres   sujets   du   secondaire**

Une  autre  considération  qui  a  été  faite  lors  du  choix  des  situations  que  nous  vous  proposons  dans  ce  recueil  est  d'aborder  en  parallèle

des  notions  qui  se  retrouvent  également  au  niveau  où  mous  exploitons  la  situations.  Cela  permet  ainsi  de  réviser  certaines  notions

déjà  vues  et  de  s'assurer  qu'elles  demeurent  à  l'esprit  des  élèves.  Voici  donc  un  survol  de  ces  notions  mathématiques  de  même  que  les

situations  dans  lesquelles  on  les  retrouve:

→  Le  cercle  :*le  cercle*

→  L'homothétie  :*les  ombres,  le  trait  sur  le  mur*

→  La  relation  de  Pythagore  :*le  drapeau  du  scout*

→  Les  taux:*le  degré  de  viscosité*

→  La  proportionnalité  :*les  ombres,  la  bouteille,  l'eau  qui  bout,  le  cercle  (cas  #  1-2),  la  location  d'un  outil,  l'étirement  d'un*

*ressort*

→  Distance  :*la  chèvre*

→  Lieu  géométrique  :*la  chèvre*

→  Le  volume:*la  bouteille*

→  La  moyenne  (vitesse)  :  le*vol  Paris-Montréal*

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 6

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Identifier   toutes   les   grandeurs   présentes   dans   une   situation**

La  majorité  des  manuels  scolaires  ne  mentionnent  que  deux  grandeurs  dans  les  problèmes  qu'ils  présentent.  Ainsi,  les  élèves  qui

arrivent  en  quatrième  secondaire  peuvent  avoir  la  conception  qu'il  n'y  a  que  deux  grandeurs  dans  n'importe  quelle  situation  et  ne  voit

donc  pas  la  raison  d'être  des  paramètre  si  ce  n'est  que  de  compliquer  l'écriture  symbolique  de  la  règle  de  la  situation.  Pour  remédier  à

cette  lacune,  nous  prenons  donc  l'habitude  de  s'interroger,  au  début  de  chaque  situation,  sur  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  la

situation,  que  nous  les  considérons  ou  pas.  Dans  la  vie  de  tous  les  jours,  rares  sont  les  situations  où  il  n'y  a  que  deux  grandeurs  à

considérer.  Il  y  a  toujours  de  multiples  facteurs  à  considérer  et  les  négliger  serait  une  grave  erreur.  En  résumé,  les  élèves  savent  qu'il

y  a  d'autres  grandeurs  dans  la  situation  et  que  nous  supposons  qu'elles  ont  une  valeur  qui  ne  change  pas,  c'est  pourquoi  nous  n'avons

pas  à  les  considérer  en  tant  que  tel. De  plus,  il  arrive  que  ces  autres  grandeurs  interviennent  lorsqu'on  tente  de  représenter

formellement  une  situation.  Il  ne  faut  donc  pas  s'étonner  de  les  voir  apparaître  dans  nos  calculs.

**Les   traductions   entre   modes   de   représentations**

Il  s'agit  de  transposer  les  informations  que  nous  avons  d'une  situation  dans  un  certain  mode  de  représentation  à  un  autre  mode.  Cette

action  permet  également  de  mettre  en  évidence  les  caractéristiques  propres  à  chaque  mode  de  représentation  et  les  contrastes  qui

peuvent  apparaître.  Nous  traiterons  plus  amplement  des  traductions  dans  les  pages  à  venir.

**Les   conventions   propres   aux   différents   modes   de   représentation**

Certains  modes  de  représentation  ont  des  conventions  que  l'on  se  doit  de  respecter. Ainsi,  une  liste  de  données  n'est  pas

automatiquement  un  tableau  de  valeurs.  Il  faut  que  les  conventions  relatives  au  tableau  de  valeurs  soient  respecter  pour  cela.  Nous  y

reviendrons  dans  les  prochaines  pages.

**Permettre   aux   élèves   de   s'approprier   la   situation**

Afin  que  le  travail  que  nous  faisons  sur  ces  situations  soit  profitable,  il  faut  que  les  élèves  s'approprie  la  situation,  c'est-à-dire  qu'ils  la

travaillent  de  telle  sorte  qu'ils  en  saisissent  mieux  les  différents  aspects.  Pour  se  faire,  il  s'agit  de  savoir  exploiter  au  maximum  les

informations  fournies  par  chaque  mode  de  représentation  comme  nous  l'expliquerons  dans  la  prochaine  section.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 7

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Établir   les   prémisses   d'apprentissages   faits   aux   niveaux   supérieurs**

La  démarche  utilisée  permet  de  mettre  en  place  certains  prémisses  d'apprentissages  qui  sont  faits  aux  niveaux  supérieurs.  Voici  une  liste

de  toutes  les  choses  que  vous  mettrez  en  place  en  prévision  d'apprentissages  ultérieurs  si  vous  exploitez  ces  situations  en  deuxième

secondaire:

→**Illustrer  la  dépendance  entre  les  variables  d'une  situation.  (3e  secondaire)**

Dans  toutes  les  situations,  nous  demandons  aux  élèves  de  décrire  sa  perception  de  la  situation  par  une  phrase.  Cette  phrase

sert  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  qui  est  prédominante  (celle  qu'on  contrôle,  qu'on  regarde  en  premier)  et  quelle

est  la  grandeur  conséquente  (qui  dépend  de  notre  grandeur  prédominante).

En  troisième  secondaire,  le  même  travail  est  à  faire,  mais  on  modifie  le  vocabulaire  afin  d'introduire  celui  qui  est  relatif  au

travail  sur  les  fonctions.  Ainsi,  la  grandeur  prédominante  sera  dorénavant  identifiée  comme  étant  la  variable  indépendante  de

la  situation  tandis  que  la  grandeur  conséquente  sera  identifiée  comme  la  variable  dépendante.

Actuellement,  plusieurs  manuels  de  troisième  secondaire  traitent  cette  question  comme  s'il  n'y  avait  qu'une  seule  variable

indépendante  possible. Suite  au  travail  que  nous  avons  fait,  les  deux  grandeurs  pourraient  être  considérées  comme  des

variables  indépendantes  à  la  condition  que  la  verbalisation  de  la  situation  faite  par  l'élève  le  mette  en  évidence.

→**Résoudre  des  problèmes  portant  sur  des  situations  où  la  relation  entre  les  variables  est  linéaire.  (3e  secondaire)**

Un  certain  nombre  de  situations  présentées  dans  ce  recueil  sont  des  situations  proportionnelles  ou,  à  tout  le  moins,

proportionnelles  à  une  constante  près.  De  ce  fait,  le  travail  fait  dans  les  différents  modes  de  représentation  peut  servir  à  mettre

en  évidence  la  caractéristique  de  variation  propre  au  modèle  linéaire.

De  plus,  notre  façon  d'aborder  les  situations  permet  d'habituer  les  élèves  à  identifier  les  points-repères  d'une  situation.  Ainsi,

ils  seront  mieux  outiller  pour  saisir  le  sens  de  ce  qu'on  entend  par  ordonnée  à  l'origine,  abscisse  à  l'origine,  maximum,

minimum,  croissance,  décroissance,  …

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 8

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

→**Analyser  des  variations  à  l'aide  de  divers  modes  de  représentation.  (4e  secondaire)**

Dès  la  deuxième  secondaire,  nous  travaillons  dans  tous  les  modes  de  représentation  et  habituons  les  élèves  à  passer  d'un  mode

à  l'autre.  Même  le  mode  formel,  pourtant  assez  complexe,  est  travaillé  dans  les  situations  géométriques  que  nous  proposons

aux  élèves  de  deuxième  secondaire  puisqu'il  s'agit  souvent  de  problèmes  en  lien  avec  l'homothétie.  Nous  détaillerons  les

informations  concernant  chaque  mode  de  représentation  dans  les  pages  qui  suivent

Nous  travaillons  également  la  différence  entre  une  relation  et  une  fonction  lorsqu'on  s'interroge  à  savoir  si  pour  une  valeur

donnée  de  notre  grandeur  prédominante,  il  est  possible  d'avoir  plus  d'une  valeur  de  la  grandeur  conséquente  qui  lui  soit

associée.

→**Déterminer  les  liens  entre  la  variation  des  paramètres  et  la  transformation  du  graphique  cartésien  correspondant.**

**(4e  secondaire  -  436)**

Dans  toutes  nos  situations,  nous  habituons  les  élèves  à  faire  un  relevé  de  toutes  les  grandeurs  présentes,  même  si  nous  ne  les

considérerons  pas  nécessairement  dans  notre  analyse  de  la  situation. De  cette  façon,  les  élèves  ne  seront  pas  étonnés,

lorsqu'ils  arriveront  en  quatrième  secondaire,  de  constater  qu'il  peut  y  avoir  plus  de  deux  grandeurs  dans  une  situation  et  qu'il

y  en  a  un  certain  nombre  que  nous  devons  fixer  (les  paramètres)  afin  de  contrôler  la  covariation  de  nos  deux  variables.  De

plus,  certaines  situations  permettent  de  constater,  déjà  en  deuxième  secondaire,  de  l'effet  de  la  variation  d'un  paramètre  sur

l'allure  du  graphique.  Par  exemple,  dans  la  situation  de*l'eau  qui  bout*,  le  graphique  ne  sera  pas  le  même  si  on  fait  bouillir

100mL  d'eau  que  si  on  en  fait  bouillir  200mL.

→**Analyser  des  fonctions  polynomiales  de  degré  inférieur  à  trois.  (4e  secondaire  -  436)**

En  quatrième  secondaire,  il  s'agit  ici  de  faire  l'étude de la situation.  Sans  le  mentionner  explicitement,  nous  avons  déjà  fait  de

grands  pas  en  ce  sens  lorsque  nous  analysons  des  situations  en  deuxième  secondaire. En  effet,  après  avoir  identifier  les

grandeurs  prédominantes  et  conséquentes  de  la  situation,  nous  nous  intéressons  aux  valeurs  qu'elles  peuvent  prendre.  Il  s'agit

donc  du  domaine  et  du  codomaine  (ou  image)  de  la  situation.  Nous  nous  intéressons  aux  points-repères  de  la  situations  de

même  qu'à  la  variation  (croissance,  décroissance,  constance).  On  s'intéresse  aussi  au  signe  associé  aux  valeurs  de  la  grandeur

conséquente  (signe  des  images).  Il  faut  d'ailleurs  travailler  des  situations  qui  vont  dans  le  négatif.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 9

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

→**Résoudre  des  problèmes  en  utilisant  des  fonctions  à  variables  réelles  comme  modèle  d'une  situation.**

**(5e  secondaire  -536)**

En  cinquième  secondaire,  les  élèves  apprennent  à  travailler  avec  de  nombreuses  nouvelles  fonctions  à  variables  réelles.  En

effet,  les  fonctions  valeur  absolue,  en  escalier,  racine  carrée,  rationnelle  (inverse),  exponentielle,  logarithmique  et

trigonométriques  sont  abordées  pour  la  première  fois  si  on  se  base  à  ce  qu'on  retrouve  dans  les  manuels  scolaires.

Pourquoi  ne  pas  profiter  du  travail  sur  la  modélisation  graphique  en  deuxième  secondaire  pour  initier  les  élèves  à  ces

fonctions  sans  les  nommer  par  leur  nom.

Voici  un  résumé  du  travail  que  nous  avons  fait:

-Situations  en  escalier  :*la  course  en  taxi*  et*le  parcomètre*.

-Situations  rationnelles  :*le  cercle  (cas#3),  le  trait  sur  le  mur*  et*le  vol  Paris-Montréal.*

De  plus,  certaines  situations  qui  sont  proposées  dans  ce  recueil  se  prêtent  très  bien  à  un  travail  sur  la  composition  de

fonctions.  Un  exemple  accompagne  d'ailleurs  la  situation  de*la  promenade  en  montagne*.  L'approche  que  nous  proposons  est

bien  différente  de  celle  proposée  dans  les  manuels,  plutôt  formelle,  et  permet  aux  élèves  de  mieux  saisir  le  sens  de  cette

opération  sur  les  fonctions.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 10

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**MODES DE REPRÉSENTATION**

Dans  l'actuel  programme  de  mathématiques  pour  le  secondaire,  il  est  question  de  quatre  modes  de  représentation  :  mots/dessin,  table  de

valeurs,  graphique,  règle/équation.  Nous  jugeons  préférable  de  subdiviser  le  premier  mode  en  deux  parties,  verbal  et  schéma,  puisqu'on  ne

retrouve  pas  nécessairement  le  même  type  d'information  dans  une  phrase  que  sur  un  schéma.  De  plus,  nous  ajoutons  l'expérience  comme

façon  de  représenter  la  situation  étant  donné  qu'une  expérience  constitue  souvent  la  situation  en  soi. Dans  les  pages  qui  suivent,  nous

analyserons  en  profondeur  chacun  de  ses  six  modes  de  représentations.

**1.   Expérience**

**Structure  des  expériences**

Les  activités  expérimentales  qui  seront  proposées  respecteront  généralement  la  méthode  expérimentale  en  plus  de  permettre  la

reconnaissance  des  particularités  et  des  caractéristiques  concernant  la  variation  des  grandeurs  présentes  dans  une  situation  donnée. Par

exemple,  il  est  possible  de  déterminer  si  les  variables  sont  reliées  de  façon  linéaire,  quadratique,  exponentielle,  …

Ainsi,  on  se  base  tout  d'abord  sur  l'observation  d'un  phénomène  qui  nous  intéresse  ou  sur  lequel  on  se  questionne.  Face  à  ces  interrogations,

les  élèves  formulent  des  hypothèses  qu'ils  vont  tenter  de  vérifier  à  l'aide  d'une  expérimentation.  En  analysant  les  résultats  obtenus  et  en

représentant  la  situation  dans  différents  modes  de  représentation,  les  élèves  pourront  confirmer  ou  corriger  leur  hypothèse  de  départ  afin  d'en

arriver  à  une  conclusion  relative  à  la  covariation  des  deux  grandeurs  prises  comme  variables.  Ainsi,  on  peut  s'attendre  à  des  conclusions  qui

s'apparentes  aux  conclusions  suivantes:

- Les  deux  grandeurs  sont  proportionnelles.

- Les  deux  grandeurs  sont  inversement  proportionnelles.

- La  première  grandeur  est  proportionnelle  à  l'inverse  de  la  deuxième.

- La  première  grandeur  est  proportionnelle  au  carré  de  la  deuxième.

- Peu  importe  la  valeur  que  prend  une  des  grandeurs,  la  valeur  de  la  seconde  grandeur  est  constante.

- Les  grandeurs  varient  de  façon  linéaire.

- …

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 11

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Quels  sont  les  avantages  de  réaliser  des  expériences  avec  les  élèves?**

 Le  principal  avantage  des  expériences  est  le  fait  qu'elles  permettent  aux  élèves  de  valider  leurs  hypothèses  quant  à  la  façon  dont  se

comportent  les  variables.

 La  préséance  d'une  certaine  variable  est  mise  en  évidence  par  le  protocole  expérimental.

 Les  élèves  apprennent  à  s'organiser  par  le  biais  des  expériences  :  ils  doivent  organiser  leurs  résultats  et  doivent  déterminer  une  façon  de

contrôler  leurs  variables  expérimentales  :  on  détermine  la  façon  de  varier  de  la  variable  indépendante  et  on  s'assure  que  les  paramètres

soient  fixés.  Ainsi,  on  peut  contrôler  la  covariation  des  deux  grandeurs  qui  nous  intéressent.

 Le  tableau  de  valeurs  apparaît  comme  un  outil  utile  pour  organiser  les  données  et  non  pas  seulement  comme  une  étape  sans  intérêt.

 Les  élèves  peuvent  mieux  se  rendre  compte  de  caractéristiques  intéressantes  qui  ressortent  d'une  certaine  situation  (notamment  pour

mettre  en  évidence  la  proportionnalité).

 Les  expériences  permettent  de  sortir  des  problèmes  scolaires,  ce  qui  permet  de  rendre  les  mathématiques  intéressantes,  voire  même

amusantes.  Les  mathématiques  servent  alors  à  expliquer  un  phénomène  qu'on  a  pu  observer  concrètement.

 Les  expériences  permettent  de  découvrir  une  grande  richesse  de  grandeurs  observables  qui  ne  se  retrouvent  pas  dans  les  problèmes

traditionnels.

 Les  expériences  permettent  également  de  faire  des  liens  avec  les  cours  de  sciences  et  peut-être  même  de  mettre  sur  pied  des  projets

interdisciplinaires.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 12

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**2.   Verbal**

Il  s'agit  d'une  description  écrite  ou  orale  de  la  situation  ou  de  la  façon  dont  on  l'interprète.

**3.   Schéma**

Il  s'agit  d'une  illustration  qu'on  se  fait  de  la  situation  qui  met  en  évidence  les  éléments  essentiels  de  la  situation.

Le  schéma  est  particulièrement  utile  dans  le  cas  où  nous  sommes  en  présence  d'une  situation  géométrique  puisqu'il  est  possible  de  faire

abstraction  des  éléments  superflus  de  la  situation  pour  ne  visualiser  que  les  éléments  importants.  Si  nous  percevons  certaines  formes

géométriques  sur  notre  schéma,  il  nous  sera  possible  d'utiliser  les  connaissances  que  nous  avons  sur  ces  figures  géométriques  pour  faire

certaines  déductions  et  déduire  certaines  mesures.

Si  on  fait  notre  schéma  à  l'échelle,  c'est-à-dire  qu'on  connaît  la  relation  de  correspondance  entre  notre  schéma  et  la  réalité,  il  est  possible  de

relever  un  certain  nombre  de  données  concernant  la  situation  et  même  de  faire  la  représentation  sous  mode  graphique  simplement  en

reportant  des  segments  tirés  de  notre  schéma.

**4.   Tableau   de   valeurs**

Un  tableau  est  constitué  de  séries  de  données  disposées  en  lignes  et  en  colonnes,  d'une  manière  ordonnée,  pour  faciliter  la  consultation.  Le

tableau  de  valeurs  a  pour  particularité  de  permettre  de  visualiser  le  lien  de  dépendance  entre  deux  grandeurs  variables.

**Conventions relatives au tableau de valeurs**

 Titre  faisant  référence  à  la  provenance  des  données

 Grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  dans  la  première  colonne  s'il  s'agit  d'un  tableau  vertical  ou  sur  la  première  ligne  s'il  s'agit

d'un  tableau  horizontal.

 Grandeur  conséquente  (variable  dépendante)  dans  la  deuxième  colonne  s'il  s'agit  d'un  tableau  vertical  ou  sur  la  deuxième  ligne  s'il  s'agit

d'un  tableau  horizontal.

 Les  valeurs  de  la  grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  sont  placées  en  ordre  croissant.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 13

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **La  hauteur  de  François  selon  son  âge** | |
| **Âge  (années)** | **Hauteur  (cm)** |
| 5 | 85 |
| 10 | 120 |
| 15 | 172 |

**5.   Graphique**

Il  s'agit  de  la  représentation  de  données  dans  un  repère,  le  plan  cartésien,  constitué  de  deux  axes  gradués  perpendiculaires.

L'axe  horizontal  est  l'axe  des  abscisses  et  l'axe  vertical  est  l'axe  des  ordonnées.

**Conventions relatives au graphique cartésien**

 Titre  faisant  référence  à  la  provenance  des  données

 Grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  est  située  sur  l'axe  des  abscisses  et  sert  à  identifier  cet  axe.

 Grandeur  conséquente  (variable  dépendante)  est  située  sur  l'axe  des  ordonnées  et  sert  à  identifier  cet  axe.

 Les  axes  sont  normés,  c'est-à-dire  que  les  graduations  sont  placées  à  intervalles  réguliers.

**Les marches-états et les marches d'accroissement**

Les**marches-états**  servent  à  situer  des  points  dans  le  plan  cartésien  par  un

report  de  deux  quantités. La  première  étant  une  valeur  associée  à  notre

grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  et  la  deuxième  étant  une

valeur  associée  à  la  grandeur  conséquente  (variable  dépendante). Ainsi,  en

partant  de  l'origine,  nous  traçons  une  première  flèche  correspondant  à  notre

première  valeur  sur  l'axe  des  abscisses. À  partir  de  la  valeur  d'abscisse

indiquée  par  la  pointe  de  cette  première  flèche,  nous  allons  tracé  une  deuxième

flèche  dans  la  direction  de  l'axe  des  ordonnées  (donc  perpendiculairement)  qui

va  correspondre  à  notre  deuxième  valeur.  La  pointe  de  cette  flèche  désigne  un

point  appartenant  à  la  situation.  Pour  placer  un  second  point,  on  reprend  le

Hauteur  (cm)

même  processus  en  repartant  à  nouveau  de  l'origine  du  plan.

180

160

140

120

100

80

60

40

20

**Hauteur  de  François  selon  son  âge**

0

0                     10         15

5

Âge  (années)

\*Remarque  :  Les  enseignants  doivent  se  forcer  à  ne  jamais  abandonner  les  marches-états  puisqu'elles  sont  une  très  bonne  habitude  et  donnent

du  sens  au  graphique  étant  donné  qu'elles  représentent  des  quantités.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 14

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **La   hauteur   de   Katia   selon   son   âge** | |
| **Âge  (années)** | **Hauteur  (cm)** |
| 0 | 40 |
| 5 | 85 |
| 10 | 120 |
| 15 | 172 |

Les**marches  d'accroissement**  quant  à  elles  servent  à  se  déplacer  d'un  point  du  graphique  à  un  autre.  Elles  illustrent  les  écarts  en  abscisses

et  en  ordonnées  entre  deux  valeurs  de  la  grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  et  deux  valeurs  de  la  grandeur  conséquente  (variable

dépendante).  La  pointe  de  chaque  flèche  en  direction  de  l'axe  des  ordonnées  désigne  un  point  appartenant  à  la  situation.

**Hauteur  de  Katia  selon  son  âge**

Hauteur  (cm)

180

160

140

**+45**

**+5**

120

**+5**                                                               **+35**

100

80

**+5**

**+52**

60

40

20

0

0                     10         15

5

Âge  (années)

**La graduation des axes**

Lorsque  vient  le  temps  de  graduer  nos  axes,  il  faut  faire  une  petite  réflexion  afin  de  faire  un  choix  de  graduation  qui  soit  approprié.  Pour  ce

qui  est  des  graduations  de  notre  axe  des  abscisses,  elles  seront  déterminer  par  la  façon  de  contrôler  notre  grandeur  prédominante.  Dans

l'exemple  ci-dessus,  on  a  des  données  sur  la  hauteurs  de  Katia  aux  âges  qui  sont  des  multiples  de  5.  Par  conséquent,  l'axe  des  abscisses  a  été

gradué  à  tous  les  cinq  unités. Si  les  données  de  la  grandeur  prédominante  n'ont  pas  un  écart  constant,  il  est  possible  de  choisir  une

graduation  en  ayant  bien  à  l'esprit  qu'on  doit  être  en  mesure  de  subdiviser  facilement  chaque  graduation  en  2  ou  3  parties  plus  petites  au

besoin.  Ainsi,  des  graduations  par  1,2,3,4,6,8  sont  très  appropriées.  Pour  ce  qui  est  des  graduations  de  l'axe  des  ordonnées,  le  tout  va

dépendre  de  l'étendue  des  valeurs  et  de  l'espace  dont  nous  disposons.  Par  exemple,  les  valeurs  de  hauteur  que  nous  avons  dans  l'exemple  ci-

dessus  sont  positives  et  la  valeur  maximale  est  172  (on  peut  arrondir  à  180).  Il  a  donc  été  décidé  de  graduer  par  20  avec  une  subdivision  à

tous  les  10  unités.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 15

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Tracer  un graphique par report de segments**

Lorsque  nous  sommes  en  présence  d'une  situation  géométrique,  il  est  possible  de  tracer  un  graphique  par  report  de  segments  sans  avoir

besoin  de  mesures.  Ces  segments  peuvent  également  servir  à  graduer  les  axes  d'une  façon  non  numérique.

Considérons  la  situation  suivante:

*Un  piéton  se  promène  sur  le  sentier  représenter  par  le  segment  pointillé  ci-dessous.*

*On  s'intéresse  à  la  distance  parcourue  par  le  piéton  et  à  la  distance  qui  le  sépare  d'une  poubelle  représentée  par  le  point  P.*

Grandeur  prédominante  :  Distance  parcourue  par  le  piéton

Grandeur  conséquente  :  Distance  entre  le  piéton  et  la  poubelle

Traçons  maintenant  le  graphique  correspondant  à  cette  situation  en  reportant  les

diférents  segments  tirés  de  la  situation  qui  deviendront  nos  marches-états.  Lorsque

la  distance  parcourue  est  nulle,  nous  savons  que  la  distance  entre  le  piéton  et  la

poubelle  correspond  au  segment  PA. Ainsi,  le  segment  AB  deviendra  notre

première  marche  tandis  que  le  segment  PB  sera  la  première  contremarche  et  ainsi  de

**P**

**A**    **B**    **C**    **D**    **E**    **F**   **G**   **H**    **I**

suite.

**distance  piéton-poubelle**

**Distance  entre  la  poubelle  et  le  piéton  selon  la**

**distance  parcourue  par  ce  dernier**

**distance  parcourue  par  le  piéton**

**A** **B** **C** **D** **E** **F** **G** **H** **I**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 16

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**6.   Formel**

Il  s'agit  de  la  formule  qui  met  en  relation  les  grandeurs  considérées.  La  grandeur  conséquente  (variable  dépendante)  est  généralement  isolée

puisqu'on  cherche  la  règle  qui  permet  de  déterminer  sa  valeur  à  partir  de  n'importe  quelle  valeur  de  la  grandeur  prédominante  (variable

indépendante).

Dans  les  cas  de  situations  géométriques,  on  peut  généralement  déterminer  la  formule  par  simple  observation  des  figures  géométriques  en

présence  et  utilisation  des  propriétés  de  ces  figures  qui  nous  sont  connues.

C'est  le  mode  de  représentation  qui  demande  le  plus  d'abstraction  puisqu'on  manipule  des  symboles  plutôt  que  de  manipuler  les  véritables

grandeurs.  Le  passage  au  langage  symbolique  doit  se  faire  graduellement.  Au  départ,  il  ne  faut  pas  se  gêner  pour  inscrire  des  expressions

littérales  dans  nos  calculs,  cela  facilite  la  compréhension.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 17

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

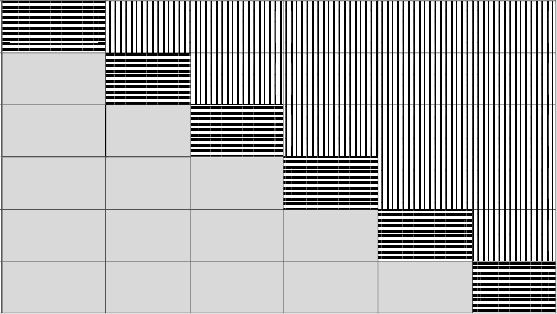
MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table  de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  |  |  |  |  |
| **Verbal** |  |  |  |  |  |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table  de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  |  |  |  |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  | **Appropriation   de   la   situation** |
|  | **Modélisation   /   Mathématisation   de   la   situation** |
|  | **Interprétation   de   la   situation** |



Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 18

**LES TRADUCTIONS**

**Légende:**

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**1.   Appropriation   de   la   situation**

Les  cases  qui  se  trouvent  sur  la  diagonale  du  tableau  de  traduction  sont  très  rarement  utilisées  dans  les  manuels  tout  comme  dans  le

programme  de  mathématiques. Pourtant,  ce  sont  les  traductions  qui  sont  les  plus  profitables  à  l'élève  en  ce  sens  qu'elles  lui

permettent  de  s'approprier  la  situation,  de  l'analyser  jusqu'aux  plus  petits  détails.  Il  ne  s'agit  pas  de  tout  réinventer  ou  de  reproduire

telle  quelle  une  modélisation  déjà  existante,  mais  plutôt  de  savoir  tirer  profits  des  informations  que  fournissent  chacun  des  modes  de

représentation.

Ces  traductions  particulières  ont  été  mises  en  évidence  dans  la  situation  du*trait  sur  le  mur*.  Examinons  brièvement  de  quelle  façon

nous  pouvons  découvrir  des  informations  concernant  notre  situation  simplement  en  regardant  le  mode  de  représentation  d'une  autre

façon.  Il  y  a  évidemment  d'autres  façons  de  travailler  dans  ces  cases  du  tableau  de  traduction,  vous  les  découvrirez  au  fur  et  à  mesure

que  vous  aborderez  de  nouvelles  situations.

♦**Expérience**   **Expérience**

Il  peut  s'agir  de  faire  une  réflexion  sur  notre  méthode  expérimentale  afin  d'éliminer  les  sources  d'erreurs.  Il  peut  aussi

s'agir  d'analyser  notre  protocole  afin  de  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  de  nous  contrôlons  réellement

puisque  nous  devrons  la  considérer  comme  telle  et  en  faire  notre  grandeur  prédominante  (variable  indépendante).

♦**Verbal**   **Verbal**

Nous  faisons  ce  type  de  traduction  lorsque  nous  reformulons  le  problème  en  nos  propres  mots,  lorsque  nous  disons  la

façon  dont  nous  l'interprétons.  C'est  aussi  le  fait  de  porter  une  attention  particulière  au  discours  que  nous  tenons.

♦**Schéma**   **Schéma**

C'est  tout  le  travail  qui  est  fait  à  partir  du  schéma  de  la  situation.  Par  exemple,  si  nous  simplifions  le  schéma  ou  que

nous  mettons  en  évidence  une  certaine  figure  géométrique  afin  d'en  utiliser  ultérieurement  les  propriétés  dans  le  but  de

mieux  comprendre  la  situation,  c'est  du  travail  sur  le  schéma  qui  demeure  dans  le  mode  de  représentation  schéma.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 19

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

♦**Tableau   de   valeurs**   **Tableau   de   valeurs**

Un  tableau  de  valeurs,  lorsque  nous  savons  bien  nous  en  servir,  peut  être  une  mine  d'or  de  renseignements.  En  effet,  le

titre  peut  nous  donner  des  informations  sur  la  situation. Les  conventions  relatives  à  ce  mode  de  représentation,

particulièrement  en  ce  qui  concerne  la  variable  indépendante  et  la  variable  dépendante,  nous  fournissent  des

informations  précieuses  sur  la  façon  dont  nous  abordons  la  situation.

Le  tableau  est  également  un  outil  utile  pour  étudier  la  covariation  de  nos  grandeurs.  En  effet,  il  est  possible  de  mettre

en  évidence  les  écarts  entre  deux  items  du  tableau  ou  encore  le  lien  interne  qui  unit  nos  deux  grandeurs.

Le  tableau  peut  également,  par  simple  observation  des  données,  nous  données  quelques  indications  quant  au  domaine

et  au  codomaine  de  la  situation  ainsi  qu'au  sujet  de  la  variation  et  des  points-repères  de  la  situation.

♦**Graphique**   **Graphique**

Sur  un  graphique,  il  est  possible  d'identifier  certains  points  à  l'aide  des  marches-états. Il  est  également  possible

d'analyser  la  variation  à  l'aide  des  marches  d'accroissements.  Le  titre  du  graphique  et  les  noms  des  axes  constituent

également  des  informations  privilégiées  quant  à  la  situation.

À  l'annexe  A  de  ce  recueil,  on  retrouve  un  texte  concernant  la  composition  de  fonctions. Nous  pouvons  voir

clairement  une  application  de  ce  type  de  traduction  dans  cette  opération  puisque  nous  réutilisons  clairement  les

contenus  de  deux  ou  plusieurs  graphiques  afin  d'en  créer  un  nouveau.

♦**Formel**   **Formel**

Il  s'agit  de  tout  le  travail  arithmétique  et  algébrique  qu'il  nous  est  possible  de  faire  sur  la  règle  de  notre  situation  afin

d'isoler  une  certaine  grandeur  ou  encore  de  déterminer  si  elle  s'apparente  à  un  modèle  connu.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 20

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**2.   Modélisation   /   Mathématisation   de   la   situation**

Il  s'agit  de  traductions  qui  ont  pour  but  de  prendre  la  situation  qui  est  représentée  dans  un  mode  simple  pour  la  représenter  d'une

façon  qui  soit  plus  abstraite.

Nous  cherchons  à  associer  la  situation  à  un  modèle  connu  de  la  façon  la  plus  précise  possible.  Nous  voulons  avoir  le  plein  pouvoir

sur  la  situation,  en  connaître  les  moindres  secrets.

**3.   Interprétation   de   la   situation**

Il  s'agit  de  prendre  une  situation  représentée  dans  un  mode  abstrait  et  de  l'interpréter  de  telle  sorte  à  la  rendre  accessible,  à  la  rendre

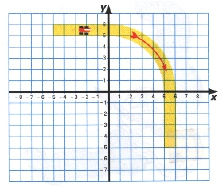
concrète.  Nous  cherchons,  par  ce  type  de  traduction,  à  simplifier  les  choses.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 21

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**ATTENTION!  DIFFICULTÉS À L'HORIZON!**

1º**Conflit   entre   l'objet-source   et   l'objet-cible**

Il  s'agit  en  quelque  sorte  d'une  transposition  que  nous  faisons  entre  la  situation  réelle  (ou  sa  représentation

schématique)  et  le  graphique  que  nous  faisons  pour  représenter  la  situation.

Par  exemple,  dans  le  cas  d'une  promenade  en  montagne,  il  se  peut  que  nous  soyons  tenter  de  représenter  la

situation  pas  une  courbe  ayant  la  forme  d'une  colline  (ou  d'un  seul  de  ses  versants).

On  peut  aussi  confondre  le  tracé  du  graphique  de  la  vitesse  en  fonction  du  temps  d'un  véhicule  de  course

avec  la  forme  de  la  trajectoire  du  véhicule.

Il  est  important  d'être  sensibilisé  à  ce  genre  d'erreur  et  de  tout  faire  pour  limiter  les  conséquences  de  ce  conflit  auprès  des  élèves.  Une  des

premières  choses  à  faire  est  d'éviter  de  sélectionner  des  problèmes  dans  les  manuels  où  l'on  incorpore  des  éléments  réels  (personnage,  voiture,

animal,…)  à  un  graphique  cartésien  comme  c'est  le  cas  dans  l'image  ci-contre1.

2º**Tendance   à   tout   linéariser**

Il  s'agit,  comme  le  nom  l'indique,  d'une  tendance  presque  naturelle  à  relier  des  points  par  un  segment  de  droite  ou  à  s'imaginer  qu'une  situation

appartient  au  modèle  linéaire  aussitôt  que  les  deux  grandeurs  "varient  dans  le  même  sens".

3º**Chronique**

Il  s'agit  d'une  habitude  que  nous  avons  à  vouloir  traiter  une  situation  comme  une  histoire  qui  se  déroule  dans  le  temps,  à  faire  un  lien  de  continuité

entre  les  différents  éléments  de  la  situation.

Les  erreurs  découlant  de  cette  difficulté  sont  plus  particulièrement  observables  dans  le  mode  de  représentation  verbal  puisqu'en  observant

attentivement  le  discours,  on  peut  relever  des  termes  qui  sont  en  lien  avec  le  temps  ou  la  vitesse.  Ainsi,  les  expressions  suivantes  sont  quelques-

unes  de  celles  qui  permettent  d'identifier  la  chronique  (si  le  temps  n'est  pas  une  grandeur  considérée  dans  la  situation  bien  évidemment):*au  début,*

*après,  longtemps,  pendant  un  certain  temps,  rapidement,  de  plus  en  plus  vite,  rapidement,  lentement,  ensuite,  …*

1

MAURER,  Serge  et  al,*Les  maths  et  la  vie  2e  secondaire*,  Montréal,  Éditions  Brault  et  Bouthilier,  1994,  tome  1,  p.161.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 22

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 23

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 24

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** | **X** |  | **X** | **X** | **X** |  |
| **Verbal** | **X** | **X** | **X** |  |  |  |
| **Schéma** |  |  |  |  | **X** | **X** |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **X** | **X** |  |
| **Graphique** |  |  |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  | **X** |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 1 - LES OMBRES**

**Tableau de traduction**

Nous  avons  tous  déjà  pu  observer  notre  ombre  sur  le  sol  lorsque  nous  marchons

dans  la  rue.  Peut-être  même  certaines  personnes  se  sont-elles  déjà  amusées  à

voir  un  jeune  enfant  essayer  d'attraper  son  ombre? Les  ombres  sont

omniprésentes  dans  notre  vie,  mais  les  connaît-on  vraiment?

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  longueur  de  l'ombre  d'un

objet,  la  distance  horizontale  qui  sépare  le  pied  de  cet  objet  de  celui  de  la  source

lumineuse.  Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Dans  cette  situation  visuelle  et  géométrique  où  les  grandeurs  sont

représentées  par  des  segments,  il  est  possible  de  faire  la  modélisation

graphique  par  report  de  segments.

♦ En  plus  des  deux  grandeurs  considérées,  il  y  a  d'autres  grandeurs  qui  sont

présentes.  Il  s'agit  ici  de  la  hauteur  de  la  lampe  et  de  la  taille  de  l'obstacle

(individu  ou  objet).  Il  est  donc  possible  de  sensibiliser  les  élèves  à  la

notion  de  paramètre  qui  est  travaillée  en  quatrième  secondaire.

♦ La  modélisation  formelle  est  accessible  aux  élèves  de  deuxième  secondaire

puisqu'ils  ont  étudié  l'homothétie  et  sont  donc  en  mesure  de  déterminer

l'égalité  des  rapports  des  mesures  des  côtés  homologues  dans  deux  figures

semblables.

♦ L'expérience  permet  aux  élèves  de  constater  qu'il  s'agit  d'une  situation

proportionnelle  alors  que  ce  n'est  pas  l'impression  qu'ils  ont  à  prime  abord.

♦  Il  est  important  de  constater  que  le  domaine  est  continu  et  que  pour  cette

raison,  il  y  aura  toujours  une  longueur  d'ombre  qui  va  être  associée  à

n'importe  laquelle  des  distances  séparant  le  pied  de  l'objet  de  celui  de  la

source  lumineuses,  qu'il  s'agisse  d'une  mesure  entière  ou  non.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 25

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants.

2.  L'enseignant  demande  aux  élèves  ce  qu'est  l'ombre  et  comment  elle  est  créée. Il  faudrait  idéalement  en  arriver  à  une  définition

ressemblant  à  celle-ci  pour  que  les  élèves  puissent  bien  comprendre  les  explications  ultérieures  :*l'ombre,  c'est  une  région  sombre  de*

*l'espace  qui  est  due  à  l'interception  de  la  lumière  par  un  obstacle.*

3.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  se  préparer  graduellement  à  l'étude  des  paramètres  qui  sera  faite  en  quatrième

secondaire.  Dans  le  présent  document,  nous  traitons  toujours  cette  situation  comme  si  c'était  évident  que  les  deux  grandeurs  considérées

sont  la  longueur  de  l'ombre  et  la  distance  horizontale  séparant  le  pied  de  la  lampe  de  celui  de  l'objet.  Il  se  peut  que  les  élèves  manifestent

une  interprétation  de  la  situation  qui  donne  plus  d'importance  à  deux  autres  grandeurs.  Il  faudrait  que  l'enseignant  soit  capable  d'utiliser

une  démarche  similaire  et  de  travailler  à  partir  des  idées  des  élèves.

4.  Demander  aux  élèves  de  dire  en  leurs  propres  mots  ce  qu'on  recherche,  c'est-à-dire  de  quelle  façon  ils  croient  que  les  deux  grandeurs

bougent,  comment  elles  varient?  D'après  la  verbalisation  faite  par  l'élève,  il  est  primordial  de  mettre  en  évidence  le  fait  qu'une  grandeur

a  préséance  sur  l'autre.  Ainsi,  nous  pouvons  nous  attendre  à  ce  que  deux  types  de  phrases  différentes  soient  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  l'objet  est  loin  de  la  lampe,  plus  l'ombre  est  grande.»

[Grandeur  prédominante  :  distance  horizontale  entre  le  pied  de  la  lampe  et  le  pied  de  l'objet]

B-«Plus  l'ombre  est  grande,  plus  l'objet  est  loin.»  [Grandeur  prédominante  :  longueur  de  l'ombre]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  distance  horizontale  entre  le  pied  de  la  lampe  et  le  pied  de  l'objet  augmente,  plus  la  longueur  de  l'ombre  est  élevée.»

[Grandeur  prédominante  :  distance  horizontale  entre  le  pied  de  la  lampe  et  le  pied  de  l'objet]

B-«Plus  la  longueur  de  l'ombre  augmente,  plus  la  distance  horizontale  séparant  le  pied  de  l'objet  du  pied  de  la  lampe  est  grande.»

[Grandeur  prédominante  :  longueur  de  l'ombre]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  ou  une  variante  qui  a  été  prononcée.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 26

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

5.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  voir  si  elles  sont  définies  en  tout  temps.  (On  se

questionne  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation  sans  le  mentionner  explicitement.)  La  distance  horizontale  entre  le  pied

de  la  lampe  et  le  pied  de  notre  objet  peut  prendre  n'importe  quelle  valeur  dans  les  réels  positifs.  La  longueur  de  l'ombre  peut  également

prendre  toutes  les  valeurs  possibles  dans  les  réels  positifs. Cependant,  l'expérience  que  nous  ferons  ultérieurement  devrait  nous

convaincre  que  l'on  ne  peut  pas  obtenir  des  mesures  précises  dans  tout  les  cas  puisque  lorsque  l'objet  est  rendu  à  une  certaine  distance  de

la  source  lumineuse,  l'ombre  est  plus  floue  et  il  est  difficile  d'en  déterminer  les  extrémités.

6.  On  peut  donc  tracer  les  axes  de  notre  plan  cartésien  en  mettant  en  abscisse  la  distance  horizontale  entre  le  pied  de  la  lampe  et  le  pied  de

l'objet  et  en  ordonnée  la  longueur  de  l'ombre.  Nous  ne  graduerons  pas  nos  axes  pour  le  moment.

longueur  de  l'ombre **Longueur  de  l'ombre  d'un  objet  selon  la  distance  qui  le  sépare  de  la  source  lumineuse**

distance  horizontale

entre  le  pied  de  la  lampe

et  le  pied  de  l'objet

7.  Demander  aux  élèves  de  faire  une  hypothèse  quant  à  la  façon  de  varier  de  nos  deux  grandeurs  et  de  faire  une  première  ébauche  du

graphique  qui  représenterait  cette  situation  en  lien  avec  leur  hypothèse.

8.  Par  questionnement,  l'enseignant  peut  faire  ressortir  un  certain  nombre  d'hypothèses  émises  par  les  élèves  et  mettre  en  évidence  la

nécessité  de  vérifier  ces  hypothèses  afin  de  bien  voir  laquelle  ou  lesquelles  correspondent  à  la  réalité.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 27

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

9.  Pour  vérifier  les  différentes  hypothèses,  quoi  de  mieux  qu'une  petite  expérience.  Dans  le  but  de  respecter  les  principes  en  didactique  des

sciences,  il  est  important  que  le  protocole  expérimental  soit  défini  par  les  élèves  eux-mêmes.  Un  exemple  se  retrouve  dans  l'encadré  ci-

dessous.

**Exemple  d'expérience:**

 Placer  un  crayon  sur  une  table  à  une  certaine  distance  d'une  lampe,  par  exemple  la  largeur  d'un  livre  ou  la  longueur

d'une  gomme  à  effacer.

 À  l'aide  d'une  règle,  relever  la  longueur  de  l'ombre  créée.

 Répéter  les  étapes  précédentes  pour  différentes  distances  entre  la  source  lumineuse  et  le  crayon.

10.  Pour  travailler  dans  le  plus  de  modes  de  représentation  possible,  il  serait  intéressant  de  demander  à  la  moitié  des  élèves  de  noter  les

résultats  dans  le  tableau  de  valeurs  et  à  une  autre  moitié  de  travailler  dans  le  graphique  où  il  est  possible  de  reporter  des  segments

directement  issus  de  l'expérience.  Ces  segments  servirons  donc  à  tracer  les  marches-états  qui  représentent  un  certain  nombre  de  points

pouvant  représenter  la  situation.

Des  exemples  se  trouvent  à  la  page  suivante.

11.  Pour  analyser  la  situation  dans  le  tableau  de  valeurs,  on  peut  mettre  en  évidence  le  fait  que  la  situation  est  proportionnelle  de  différentes

manières  (lien  interne,  écart  additif  constant  à  la  variable  indépendante,  écart  multiplicatif).

12.  Si  on  regarde  maintenant  notre  graphique,  les  élèves  seraient  tentés  de  reliés  les  points  immédiatement.  Toutefois,  il  faut  leur  faire

remarque  qu'on  ne  sait  pas  encore  ce  qui  se  passe  entre  deux  points  du  graphique  et  qu'il  faut  réfléchir  un  peu  avant  de  relier  les  points.

En  faisant  le  lien  avec  notre  tableau  de  valeurs  où  nous  avons  mis  la  proportionnalité  en  évidence  et  en  mentionnant  que  pour  n'importe

quelle  valeur  de  distance  horizontale  entre  la  source  lumineuse  et  l'objet,  on  a  toujours  une  grandeur  d'ombre  associée  et  qu'à  une

distance  nulle,  la  grandeur  de  l'ombre  est  nulle;  il  est  possible  de  tracer  la  droite  représentant  la  situation.  Il  ne  faut  pas  se  gêner  pour

passer  régulièrement  d'un  mode  de  représentation  à  l'autre.

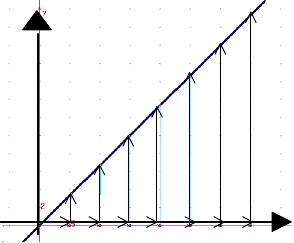
Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 28

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **Longueur  de  l'ombre  d'un  objet  selon  la  distance  qui  sépare  l'objet  et  la  source  lumineuse**  **(hauteur  de  la  lampe  :  25  cm)**  **(hauteur  du  crayon  :  10  cm)** | |
| **Distance horizontale entre le pied de la source lumineuse et celui de l'objet (cm)** | **Longueur de l'ombre**  **(cm)** |
| 0 | 0 |
| 5 | 3,3 |
| 10 | 6,7 |
| 15 | 10 |
| 20 | 13,3 |
| 25 | 16,7 |
| 30 | 20 |
| \*Comme  il  s'agit  d'une  situation  réelle,  nous  ne  réussirons  pas  à  obtenir  des  résultats  indéfiniment. | |

**Graphique**

**Tableau  de  valeurs**

**Variation de la longueur de l'ombre selon la distance qui sépare l'objet et la source lumineuse**

longueur de l'ombre

distance horizontale entre le pied de

l'ombre et celui de la source lumineuse

Comme  il  s'agit  d'une  situation  géométrique,  il  est  possible  de  tracer  le  graphique  par  report  de  segments.  (Voir  p.16)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 29

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

13.  On  revient  sur  les  différentes  hypothèses  émises  par  les  élèves  et  on  regarde  lesquelles  sont  vérifiées.

14.  Il  est  ensuite  possible  de  faire  un  premier  essai  de  modélisation  formelle  puisque  les  élèves  ont  déjà  étudié  les  figures  semblables  en

deuxième  secondaire.  On  peut  donc  faire  d'abord  un  schéma  de  la  situation.

**Schéma**

*l*

*h*

*d* *g*

Légende:

*l  :  hauteur  de  la  lampe*

*h  :  hauteur  de  l'objet*

*g  :  longueur  de  l'ombre*

*d  :  distance  horizontale  qui  sépare  le  pied  de  l'objet  de  celui  de  la  lampe*

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 30

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

15.  Nous  pouvons  maintenant  écrire  l'égalité  des  rapports  des  côtés  homologues. Si  les  élèves  ont  suffisamment  d'habiletés  avec  les

manipulations  algébriques,  on  peut  isoler  notre  grandeur  conséquente,  soit  la  grandeur  de  l'ombre.

Si  on  observe  le  schéma  représentant  la  situation,  on  peut  voir  qu'il  y  a  des  triangles  rectangles  qui  sont  semblables  puisqu'ils  ont  tous  un

angle  droit  et  un  autre  angle  qui  est  commun  avec  le  plus  grand  des  triangles.  (Cas  A-A  de  similitude  des  triangles)

Comme  on  a  des  triangles  semblables,  on  sait  que  les  rapports  des  mesures  des  côtés  homologues  sont  égaux.  Nous  pouvons  donc  établir  la

proportion  suivante  :

*hauteur  de la lampe*  *hauteur de l*'*objet*

*hauteur  de  l*'*objet*



*distance horizontale qui sépare le pied de l*'*objet de celui de la lampe*

*longueur  de  l*'*ombre*

On  constate  ici  que  quatre  différentes  grandeurs  sont  utilisées  pour  représenter  formellement  la  situation.  On  peut  toutes  les  représentées  par

une  lettre  :

l  :  hauteur  de  la  lampe

h  :  hauteur  de  l'objet

g  :  longueur  de  l'ombre

d  :  distance  horizontale  qui  sépare  le  pied  de  l'objet  de  celui  de  la  lampe

On  doit  cependant  bien  avoir  en  tête  qu'il  n'y  a  que  deux  de  ces  grandeurs  qui  sont  des  variables.  Dans  ce  cas-ci,  il  s'agit  de  la  longueur  de

l'ombre  et  de  la  distance  horizontale  qui  sépare  le  pied  de  l'objet  de  celui  de  la  lampe.  Ainsi,  l'utilisation  de  lettres  dans  la  représentation

formelle  n'a  pas  toujours  le  même  rôle.

*l*  *h*

*h*



*d*

*g*

Si  on  isole  notre  grandeur  conséquente,  nous  obtenons  donc:

*g*  

*dh*

*l*  *h*

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 31

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Comme  il  s'agit  d'une  situation  qui  se  représente  bien  géométriquement,  il  serait  possible  de  la  travailler  avec  le  logiciel*Cabri-géomètre*

pour  mettre  en  évidence  les  différents  liens  entre  les  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.  En  effet,  ce  logiciel  peut  nous  permettre  de

faire  bouger  certaines  grandeurs  tandis  que  nous  en  fixons  d'autres  et  il  nous  permet  aussi  de  faire  apparaître  les  mesures  à  l'écran,  ce  qui

peut  nous  permettre  rapidement  de  dresser  une  table  de  valeurs  représentant  la  situation.  Par  contre,  on  ne  peut  pas  travailler  dans  le

mode  graphique  de  façon  rapide  et  pratique  avec  ce  logiciel.

  Il  est  possible  d'ajouter  d'autres  grandeurs  et,  par  une  étude  approfondie  des  paramètres,  de  déterminer  de  nouvelles  modélisations

formelles  qui  représentent  cette  situation.  On  peut  penser  entre  autres  aux  angles  présents  dans  le  triangle  qui  représente  cette  situation.

  Cette  situation  peut  également  être  abordée  en  troisième  secondaire  où  on  travaille  le  modèle  linéaire  de  même  que  les  situations

proportionnelles  et  inversement  proportionnelles  et  en  quatrième  secondaire  lors  de  l'étude  des  fonctions  polynomiales  réelles.

  Cette  situation  pourrait  également  être  intéressante  lors  du  passage  à  la  géométrie  dans  l'espace  tridimensionnel.  En  effet,  on  pourrait

alors  s'intéresser  à  la  surface  de  l'ombre  créée  par  rapport  à  la  distance  entre  la  source  lumineuse  et  l'obstacle.  Nous  aurions  alors  une

fonction  quadratique.  Comme  cette  application  est  en  lien  direct  avec  les  solides  semblables,  il  faudrait  attendre  la  quatrième  secondaire

avant  de  l'utiliser.

  Il  est  possible  d'introduire  des  valeurs  négatives  dans  cette  situation  si  on  considère  l'orientation  des  segments  :  si  l'objet  est  situé  derrière

la  lampe,  la  distance  horizontale  entre  la  source  lumineuse  et  l'objet  serait  négative.  De  la  même  façon  pour  la  grandeur  de  l'ombre,  on

peut  décider  de  la  considérer  en  valeur  absolue  ou  encore  de  lui  attribuer  un  signe  selon  son  orientation  par  rapport  à  la  lampe.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 32

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** | **X** |  |  | **X** |  |  |
| **Verbal** | **X** | **X** |  |  |  |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **X** | **X** |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 2 - L'EAU QUI BOUT**

**Tableau de traduction**

Tout  le  monde  est  amené,  un  jour  ou  l'autre,  à  faire  bouillir  de  l'eau  afin  de  cuire

des  aliments  ou  encore  pour  préparer  une  infusion  de  thé.  Plusieurs  savent  que

l'eau  peut  passer  de  l'état  liquide  à  l'état  gazeux,  mais  sait-on  vraiment  comment

se  produit  la  vaporisation?

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  temps,  la  température  de

l'eau.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Nous  avons  ici  une  situation  où  le  temps  est  la  grandeur  prédominante.  Les

élèves  se  questionnent  donc  sur  la  façon  dont  varie  la  température  de  l'eau.

Sans  faire  l'expérience,  on  peut  avoir  de  multiples  hypothèses.

♦ Nous  avons  ici  un  exemple  de  situation  où  les  grandeurs  sont

proportionnelles  à  une  constante  près  sur  un  certain  intervalle  et  où  la

température  demeure  constante  sur  un  autre  intervalle. Cette  situation

constitue  donc  une  première  approche  avec  les  fonctions  dites  "par  parties".

♦ Pour  l'expérimentation,  il  est  possible  de  faire  un  lien  intéressant  avec  le

cours  d'environnement  physique  de  deuxième  secondaire  où  un  module

entier  est  consacré  à  l'étude  de  la  chaleur  et  de  ses  effets.

♦ Il  y  a  plusieurs  paramètres  qui  sont  à  contrôler  dans  une  telle  expérience.

Elle  peut  donc  servir  à  faire  prendre  conscience  aux  élèves  de  certaines

grandeurs  qu'il  faut  connaître  et  fixer  pour  pouvoir  réaliser  une  expérience

convaincante  qui  vise  un  but  précis.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 33

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants  sans  donner  d'indication  sur  la  façon  de  varier  des  deux  grandeurs.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  se  préparer  graduellement  à  l'étude  des  paramètres  qui  sera  faite  en  quatrième

secondaire. On  peut  ici  s'attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  le  temps,  la  température  de  l'eau,  la  quantité  d'eau,  la  pression

atmosphérique,  la  source  de  chaleur,  le  type  de  récipient  dans  lequel  est  l'eau,  …

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle

est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente.  Ainsi,  on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes:

A-«Plus  ça  fait  longtemps  qu'on  chauffe,  plus  la  température  de  l'eau  est  élevée.»  [Grandeur  prédominante  :  temps]

B-«Plus  la  température  de  l'eau  est  élevée,  plus  ça  fait  de  temps  que  je  chauffe.»  [Grandeur  prédominante  :  température  de  l'eau]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus

varié  qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  le  temps  augmente,  plus  la  température  de  l'eau  est  élevée.»  [Grandeur  prédominante  :  temps]

B-«Plus  la  température  de  l'eau  augmente,  plus  le  temps  de  chauffage  est  élevé.»[Grandeur  prédominante  :  température  de  l'eau]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  qui  a  été  dite.

4.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  voir  pour  quelles  valeurs  elles  sont  définies.  (On  se

questionne  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation  sans  le  mentionner  explicitement.)  Pour  ce  qui  est  du  temps,  on  peut

supposer  qu'il  sera  défini  dans  les  réels  positifs,  c'est-à-dire  de  0  jusqu'à  ce  que  toute  l'eau  se  soit  évaporée.  La  température,  quant  à  elle,

va  varier  de  la  température  de  la  pièce  (environ  22ºC)  jusqu'à  la  température  d'ébullition  (100ºC). Il  est  possible  que  les  élèves  ne

connaissent  pas  la  température  d'ébullition  de  l'eau.  Dans  un  tel  cas,  ne  pas  leur  donner  cette  valeur  et  plutôt  la  noter  "température

maximale".

5.  Demander  aux  élèves  de  faire  une  hypothèse  quant  à  la  façon  de  varier  de  nos  deux  grandeurs  et  de  faire  une  première  ébauche  du

graphique  qui  représenterait  cette  situation  en  lien  avec  leur  hypothèse.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 34

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Temps  écoulé  depuis  le  début  du  chauffage  (min) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Température  de  l'eau  (ºC) | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 79 | 85 | 91 | 98 | 100 | 100 | 100 | 100 |

6.  Par  questionnement,  l'enseignant  peut  faire  ressortir  un  certain  nombre  d'hypothèses  émises  par  les  élèves  et  mettre  en  évidence  la

nécessité  de  vérifier  ces  hypothèses  afin  de  bien  voir  laquelle  ou  lesquelles  correspondent  à  la  réalité.

7.  Pour  vérifier  les  différentes  hypothèses,  nous  allons  maintenant  réaliser  l'expérience  (qui  peut  se  faire  avec  la  collaboration  de

l'enseignant  d'environnement  physique  de  deuxième  secondaire).  Dans  le  but  de  respecter  les  principes  en  didactique  des  sciences,  il  est

important  que  le  protocole  expérimental  soit  défini  par  les  élèves  eux-mêmes.

8.  Afin  de  retirer  un  maximum  d'informations  de  cette  expérience,  on  peut  séparer  les  élèves  en  équipes  de  deux  ou  trois  personnes  et

modifier  certaines  des  caractéristiques  expérimentales.  Par  exemple,  on  peut  faire  varier  le  temps  entre  les  différentes  observations  (30  s,

1  min.,  2  min.)  ou  encore  la  quantité  d'eau  à  chauffer  (100  mL,  200  mL  ,  500  mL).  Même  si  la  quantité  d'eau  n'est  pas  une  des  grandeurs

que  l'on  considère  dans  la  situation  telle  que  proposée  au  départ,  il  peut  être  intéressant  de  faire  remarquer  aux  élèves  que  les  résultats

varient  si  on  a  des  quantités  différentes  d'eau.  Par  conséquent,  si  on  veut  avoir  tous  les  mêmes  résultats,  il  faut  fixer  cette  quantité  d'eau

pour  qu'elle  soit  commune  à  tous.  (Ceci  est  en  lien  direct  avec  l'étude  des  paramètres  en  quatrième  secondaire.)

9.  Pour  relever  les  données  expérimentales,  le  mode  de  représentation  le  plus  approprié  est,  dans  ce  cas-ci,  le  tableau  de  valeurs.  En  voici

un  exemple  pour  le  cas  où  on  fait  chauffer  100  mL  d'eau  jusqu'à  ébullition.

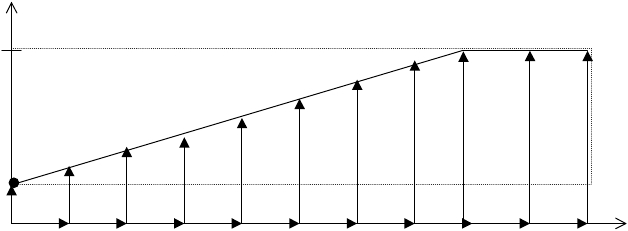
Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 35

**Température   de   l'eau   selon   le   temps   de   chauffage**

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

10.  Si  on  jette  un  regard  au  tableau  de  la  page  précédente,  on  remarque  que  la  température  croît  jusqu'à  100ºC  et  qu'elle  se  stabilise  à  cette

valeur.  Si  on  regarde  les  accroissements  de  température  de  l'eau  entre  chaque  ligne,  on  peut  constater  que  ces  accroissements  se  situent

aux  alentours  de  6-7  et  qu'ils  sont  donc  assez  constants  si  on  fait  abstraction  des  erreurs  expérimentales  qui  ont  pu  se  produire.  Si  on

vient  placer  les  différents  points  dans  un  graphique  à  l'aide  de  marches-états,  on  peut  donc  s'attendre  à  ce  que  les  points  soient  alignés.

(On  verra  précisément  pourquoi  lors  de  l'étude  du  modèle  linéaire  en  troisième  secondaire.)  Comme  au  temps  0,  la  température  n'est  pas

nulle,  on  ne  peut  pas  dire  que  nous  sommes  en  présence  d'une  situation  proportionnelle.  Par  contre,  la  caractéristique  de  la  variation  est

semblable  alors  on  peut  dire  que  sur  un  certain  intervalle  de  temps,  la  situation  est  proportionnelle  à  une  constante  près.  Lorsqu'on  atteint

la  température  de  100ºC,  on  remarque  que  la  température  cesse  de  varier  et  reste  constante.  Cette  température  correspond  précisément  au

point  d'ébullition  de  l'eau  et  va  donc  rester  constante  jusqu'à  l'évaporation  complète  de  l'eau.

**Température  de  l'eau  selon  le  temps  écoulé  depuis  le  début  du  chauffage**

**Température  (ºC)**

100ºC

**temps**

11.  Avant  de  relier  les  différents  points,  il  faut  s'interroger  pour  savoir  si  entre  deux  points  définis  par  notre  expérience  la  caractéristique  de

variation  est  la  même,  c'est-à-dire  est-ce  que  pour  des  intervalles  de  temps  plus  petits  on  a  aussi  des  accroissements  de  température

constants.  S'il  y  a  certaines  équipes  qui  ont  travaillé  avec  des  intervalles  de  temps  plus  petits,  on  peut  alors  utiliser  leurs  résultats  pour

faire  cette  vérification.  Comme  on  ne  peut  pas  utiliser  des  intervalles  de  temps  infiniment  petits  lors  d'une  expérience,  il  faudra  supposer

que  les  accroissements  de  températures  sont  constants  pour  des  intervalles  de  temps  de  même  longueur  et  ainsi,  on  peut  se  permettre  de

relier  les  points.  On  peut  finalement  faire  un  retour  sur  les  différentes  hypothèses  qui  avaient  été  émises  par  les  élèves.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 36

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Il  est  possible  de  faire  une  expérience  analogue  en  considérant  la  solidification  de  l'eau,  c'est-à-dire  le  passage  de  l'état  liquide  à  l'état

solide  (glace).

  Lorsqu'on  atteint  le  point  d'ébullition,  on  constate  que  le  liquide  conserve  approximativement  la  même  température  jusqu'à  ce  que

l'évaporation  soit  complète.  On  pourrait  donc  se  servir  de  cette  observation  pour  déterminer  le  point  d'ébullition  d'autres  produits,  qui  ce

soit  de  façon  expérimentale  ou  encore  par  observation  d'un  graphique.  Pourquoi  ne  pas  utiliser  un  graphique  ou  les  trois  phases  seraient

présentes  :  solide,  liquide  et  gazeux  ?

  En  troisième  secondaire,  dans  le  cadre  de  l'étude  du  modèle  linéaire,  il  est  possible  de  déterminer  les  formules  qui  représentent  cette

situation,  que  ce  soit  à  partir  du  graphique  ou  encore  par  accumulation  d'accroissements  dans  le  tableau  de  valeurs.

  Peu  d'écoles  ont  le  budget  nécessaire  pour  se  le  procurer,  mais  il  existe  des  thermomètres  électroniques  qu'on  peut  relier  à  une

calculatrice  graphique  ou  à  un  ordinateur  afin  d'obtenir  le  tracé  exact  du  graphique  de  la  température  en  fonction  du  temps.  Il  serait  alors

intéressant  d'analyser  ce  graphique  afin  d'analyser  les  variations  de  températures  et  de  les  comparer  aux  conclusions  que  nous  avons  pu

faire  à  partir  de  l'expérience.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 37

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 38

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** | **X** | **X** |  |  | **X** |  |
| **Verbal** | **X** | **X** |  |  |  |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 3 - L'ÉTIREMENT D'UN RESSORT**

**Tableau de traduction**

Une  des  propriétés  du  ressort  est  de  pouvoir  s'étirer.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  masse  suspendue,  la

longueur  du  ressort.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Comme  ce  n'est  pas  une  situation  de  la  vie  courante,  le  recours  à

l'expérience  est  primordial  pour  permettre  aux  élèves  de  s'approprier  la

situation.

♦ Il  est  possible  de  réaliser  l'expérience  avec  du  matériel  très  simple.  En

effet,  le  ressort  peut  être  remplacé  par  un  simple  élastique  et  nous

obtiendrons  des  résultats  qui  sont  tout  aussi  valables.

♦ C'est  une  situation  qui  représente  bien  le  modèle  linéaire  et  pour  laquelle

nous  n'avons  pas  besoin  nécessairement  de  relever  des  données

numériques.

♦ Bien  que  l'étirement  d'un  ressort  soit  une  notion  qui  apparaisse  au

programme  de  physique  de  cinquième  secondaire,  c'est  une  situation  qui

peut  être  bien  manipulée  dès  le  secondaire  2  ou  3.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 39

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes.  Nous  pouvons  nous  attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  la  longueur  du  ressort,

l'allongement  du  ressort,  la  masse  suspendue,  le  nombre  de  spires  qu'il  y  a  dans  le  ressort,  …

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle

est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente.  Ainsi,  on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes:

A-«Plus  la  masse  est  grande,  plus  le  ressort  est  long.»  [Grandeur  prédominante  :  masse  suspendue]

B-«Plus  le  ressort  est  grand,  plus  c'est  pesant.»  [Grandeur  prédominante  :  longueur  du  ressort]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  masse  suspendue  augmente,  plus  la  longueur  du  ressort  est  grande.»  [Grandeur  prédominante  :  masse  suspendue]

B-«Plus  la  longueur  du  ressort  augmente,  plus  la  masse  suspendue  est  grande.»  [Grandeur  prédominante  :  longueur  du  ressort]

\*Nous  verrons  bientôt  pourquoi  la  phrase  A  est  celle  qui  a  le  plus  de  sens  dans  le  contexte  de  cette  situation.

4.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  déterminer  quelles  valeurs  nous  risquons  d'observer

vraisemblablement  dans  cette  situation.  (Nous  nous  questionnons  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation  sans  le  mentionner

explicitement.)  Pour  ce  qui  est  de  la  masse  suspendue,  elle  sera  définie  dans  les  réels  positifs,  c'est-à-dire  de  0  jusqu'à  une  certaine  masse

maximale  que  le  ressort  de  pourrait  pas  supporter. La  longueur  du  ressort,  quant  à  elle,  va  varier  entre  0  et  une  certaine  longueur

maximale.  Il  est  impossible  de  prévoir  les  valeurs  que  le  ressort  ne  pourra  pas  supporter  sans  avoir  de  caractéristiques  propres  au  ressort.

Nous  allons  seulement  signifier  qu'il  y  aura  des  valeurs  extrêmes.

5.  Demander  aux  élèves  de  faire  une  première  ébauche  du  graphique  qui  représenterait  cette  situation  en  lien  avec  leur  hypothèse  (étape  3).

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 40

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

6.  Par  questionnement,  l'enseignant  peut  faire  ressortir  un  certain  nombre  d'hypothèses  émises  par  les  élèves  et  mettre  en  évidence  la

nécessité  de  vérifier  ces  hypothèses  afin  de  bien  voir  laquelle  ou  lesquelles  correspondent  à  la  réalité.

7.  Pour  vérifier  les  différentes  hypothèses,  nous  allons  maintenant  réaliser  l'expérience.  Le  matériel  dont  nous  avons  besoin  pour  cette

expérience  est  minime:  un  élastique  et  des  masses  à  suspendre.  Dans  le  but  de  respecter  les  principes  en  didactique  des  sciences,  il  est

important  que  le  protocole  expérimental  soit  défini  par  les  élèves  eux-mêmes.  Il  est  primordial  de  faire  réaliser  aux  élèves  que  leur

démarche  expérimentale  met  en  évidence  qu'elle  est  la  grandeur  prédominante  dans  leur  façon  d'aborder  la  situation  puisqu'il  s'agit  de  la

grandeur  qu'ils  contrôlent.  Dans  le  cas  qui  nous  intéresse  présentement,  c'est  la  masse  suspendue  que  les  élèves  font  varier,  il  s'agit  donc

de  la  grandeur  prédominante.  La  longueur  du  ressort  est  donc  la  grandeur  conséquente.  Il  serait  beaucoup  plus  difficile,  voire  même

impossible,  de  sélectionner  une  longueur  de  ressort  pour  ensuite  ajuster  la  masse  suspendue.  (C'est  pour  cette  raison  que  la  phrase  A  doit

être  privilégiée  à  l'étape3.)

8.  Nous  allons  passer  immédiatement  à  la  représentation  sous  mode  graphique  en  utilisant  un  report  de  segments  directement  tirés  de  notre

expérience.  Nous  commençons  tout  d'abord  par  reporter  la  mesure  du  ressort  lorsqu'aucune  masse  n'est  suspendue,  elle  détermine  notre

ordonnée  à  l'origine. Ensuite,  nous  allons  ajouter  successivement  des  masses  de  100g  et  reporter  les  longueurs  du  ressort  qui

correspondent  à  chaque  masse  sur  notre  graphique.  Un  exemple  de  graphique  se  trouve  à  la  page  suivante.

9.  Les  élèves  pourraient  être  tentés  de  relier  immédiatement  les  points  que  nous  avons  positionnés  par  des  segments  orientés.  Il  ne  faut  pas

les  laisser  faire.  On  ne  relie  jamais  des  points  sans  avoir  fait  une  réflexion  au  préalable.  Nous  pouvons  dire  que  la  masse  suspendue  est

une  grandeur  qui  est  continue  puisque  pour  n'importe  quelle  valeur  située  entre  deux  valeurs  utilisées  dans  l'expérience,  il  serait  possible

d'avoir  un  tuyau  de  cette  longueur  pour  observer  notre  trait.  De  façon  générale,  on  remarque  que  plus  la  masse  suspendue  augmente,

plus  la  longueur  du  ressort  augmente.  Nous  pouvons  sans  l'ombre  d'un  doute  affirmer  qu'il  en  est  de  même  entre  chacun  de  nos  points.  Il

serait  donc  possible  de  tracer  une  courbe  qui  représenterait  notre  situation  de  façon  générale  en  passant  par  nos  points,  il  s'agit  ici  d'une

droite.

\*Il  est  à  noter  cependant  que  certaines  erreurs  expérimentales  ont  pu  s'être  glissées  dans  notre  expérience.  Graphiquement,  il  en  résulterait

que  certains  points  ne  se  trouvent  pas  sur  notre  droite.

10.  Si  nous  examinons  les  points  que  nous  connaissons  du  graphique  et  que  nous  regardons  les  marches  d'accroissement  qui  nous  permettent

de  passer  de  l'un  à  l'autre,  il  est  possible  de  constater  que  pour  des  accroissements  constants  de  masse,  nous  avons  des  accroissements

constants  de  la  longueur  du  ressort.  C'est  donc  une  situation  qui  est  linéaire.  Elle  est  proportionnelle  à  une  constante  près  puisque

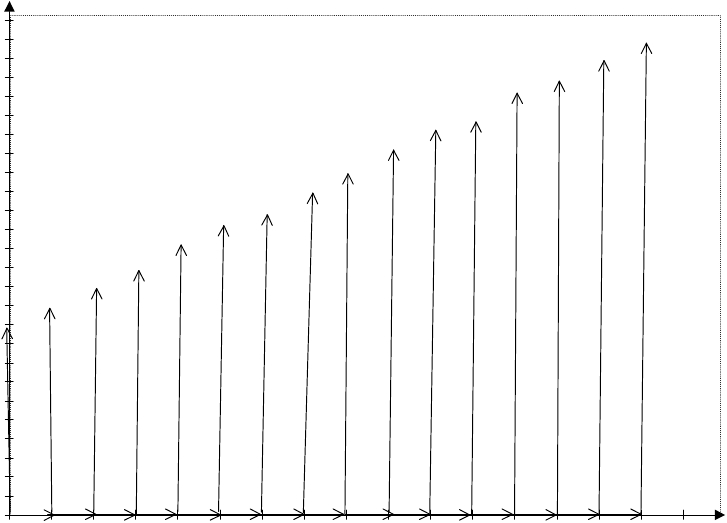
lorsque  la  masse  suspendue  est  nulle,  la  longueur  du  ressort  n'est  pas  nulle.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 41

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Longueur  du  ressort  selon  la  masse  qui  y  est  suspendue**

Longueur  du  ressort

Masse  suspendue

0

100  200   300  400  500

600         800  900  1000

700

1100

1200  1300  1400 1500

(g)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 42

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Si  on  relève  des  données  numériques,  il  est  possible  de  trouver  la  formule  de  cette  situation  en  cumulant  les  accroissements  dans  le

tableau  de  valeurs.  C'est  une  façon  de  réinvestir  le  travail  qui  a  été  fait  sur  les  suites  en  première  secondaire.

  Il  est  possible  de  réaliser  l'expérience  avec  différents  types  de  ressorts  afin  de  comparer  les  résultats  obtenus  et  d'en  arriver  à  définir  ce

qu'est  la  constante  d'élasticité  et  comment  nous  pouvons  la  retrouver  dans  nos  différents  modes  de  représentation.

  Autre  situation  en  lien  avec  la  mécanique  qui  peut  être  intéressante  à  travailler  avec  les  élèves  :  le  pendule.  Les  élèves  construisent  eux-

même  un  pendule  avec  une  corde  d'une  certaine  longueur  et  un  certain  nombre  de  masses  qu'ils  attachent  à  la  corde.  Les  élèves  calculent

ensuite  le  nombre  d'oscillations  que  fait  le  pendule  en  un  temps  donné.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 43

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 44

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  |  |  |  |  |
| **Verbal** |  |  | **X** |  |  |  |
| **Schéma** |  | **X** | **X** |  | **X** |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 4 - LA BOUTEILLE**

**Tableau de traduction**

Nous  avons  une  bouteille  qui  a  la  forme  illustrée  ci-contre.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  volume

de  liquide,  le  niveau  du  liquide  dans  la  bouteille.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

.

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Aucune  des  grandeurs  n'a  de  préséance  naturelle  sur

l'autre.  Ainsi,  nous  verrons  autant  d'élèves  dire  que  le

niveau  de  liquide  dans  la  bouteille  est  la  grandeur  prédominante  qu'il  y  en

aura  qui  dirons  que  c'est  plutôt  le  volume  de  liquide  dans  la  bouteille.

♦ Lorsqu'on  veut  représenter  le  volume  dans  la  modélisation  graphique,  on  ne

peut  pas  simplement  reporter  des  segments  puisque  le  volume  n'est  pas  une

grandeur  linéaire.  Comme  on  veut  "linéariser"  cette  grandeur  dans  le  but

de  produire  un  graphique,  il  faudra  donc  réfléchir  à  la  façon  de  graduer  nos

axes.

♦ Lorsque  les  élèves  décrivent  ce  qui  se  passe  dans  cette  situation  en  leurs

propres  mots,  ils  intègrent  souvent  des  éléments  de  remplissage,  de  temps

(alors  que  la  situation  ici  n'est  pas  une  chronique),  de  vitesse,  etc.  Pour

corriger  la  situation,  il  est  possible  de  dire  aux  élèves  de  vider  la  bouteille

au  lieu  de  la  remplir,  …

♦ Dans  la  description  qu'ils  feront  de  la  situation  pour  décrire  leur

modélisation  graphique,  il  y  a  de  fortes  chances  pour  que  les  élèves

utilisent  le  terme  "proportionnel".  L'enseignant  doit  alors  s'assurer  que

toutes  les  caractéristiques  relatives  à  la  proportionnalité  sont  respectée  dont

celle  qui  veut  que  la  droite  tracée  passe  par  l'origine  du  plan  cartésien.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 45

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants  sans  donner  d'indication  sur  la  façon  de  varier  des  deux  grandeurs.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  se  préparer  graduellement  à  l'étude  des  paramètres  qui  sera  faite  en  quatrième

secondaire.  On  peut  ici  s'attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  le  niveau  d'eau  dans  la  bouteille,  le  diamètre  de  la  bouteille,  le  volume

d'eau  dans  la  bouteille,  le  rayon  de  la  bouteille,  la  surface  d'eau,  la  circonférence  de  la  bouteille,…

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  d'écrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle

est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente. Les  élèves  doivent  également  faire  une  ébauche  du  graphique

représentant  cette  situation.

4.  Pendant  ce  temps,  l'enseignant  circule  dans  la  classe  afin  de  repérer  les  étudiants  qui  ont  choisi  le  niveau  de  liquide  comme  grandeur

prédominante  et  ceux  qui  ont  choisi  le  volume  de  liquide  dans  la  bouteille.  Il  distribue  une  acétate  à  un  élève  de  chaque  catégorie.

5.  L'enseignant  demande  aux  élèves,  à  tour  de  rôle,  à  venir  présenter  leur  interprétation  de  la  situation  en  disant  tout  d'abord  la  phrase  qui

résume  de  quelle  façon  les  deux  grandeurs  sont  reliées.  On  demande  ensuite  aux  élèves  de  dire  quelles  sont  les  valeurs  de  volume  et  de

niveau  de  liquide  pour  lesquelles  la  situations  est  vérifiée.  (Nous  nous  intéressons  donc  au  domaine  et  au  codomaine  de  la  situation  sans

le  mentionner  explicitement.

6.  L'enseignant  demande  ensuite  à  l'élève  d'identifier  les  points-repères  de  cette  situation  qui  devraient  être  les  points  qui  délimitent  les

différentes  phases.  L'élève  peut  placer  ces  points-repères  sur  le  graphique  à  l'aide  de  marches-états.  Il  faudrait  travailler  régulièrement

sur  la  représentation  de  la  bouteille  en  parallèle  avec  le  reste.

7.  On  est  maintenant  intéressé  à  savoir  comment  est  la  variation  entre  ces  points-repères.  Au  départ,  on  peut  déduire  que  c'est  croissant

partout  puisque  lorsqu'une  grandeur  augmente  (volume  ou  niveau  d'eau),  l'autre  grandeur  augmente  aussi.  Afin  de  pouvoir  tracer  la

courbe,  l'étudiant  doit  bien  verbaliser  la  caractéristique  de  variation  de  la  situation  comme  dans  les  exemples  qu'on  retrouve  dans  les

pages  suivantes.  Il  est  important  ici  de  s'assurer  que  le  temps  ne  soit  pas  omniprésent  dans  les  explications  faites  par  l'élève  afin  de  ne

pas  surcharger  le  discours.  Avec  les  explications,  on  devrait  s'attendre  à  voir  apparaître  des  marches  d'accroissement  sur  le  graphique.

On  ne  peut  relier  les  points  qu'une  fois  la  caractéristique  de  variation  bien  établie  pour  une  certaine  phase.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 46

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **Verbal** | **Graphique** |
| Phase 1 : On remarque que cette portion de la bouteille est cylindrique.     Le niveau est 0 lorsque le  volume de liquide est également de 0. Par conséquent, si on ajoute un certain volume de liquide, le  niveau va augmenter d'une certaine hauteur.     Si on ajoute une seconde fois le même volume de  liquide et qu'on demeure dans la même portion de la bouteille, le niveau va augmenter de la même  hauteur. On peut faire une réflexion semblable pour différents volumes de liquide.  Phase 2 : Cette deuxième portion de la bouteille est de forme conique. Comme à la base elle est plus  évasée, on sait que si on ajoute un certain volume de liquide, le niveau va augmenter d'une certaine  hauteur.     En raison de la forme conique, la bouteille se rétrécit et, par conséquent, si on ajoute une  seconde fois le même volume de liquide, le niveau va augmenter d'une hauteur supérieure. La même  situation va se produire tant et aussi longtemps que nous serons dans cette section et ce, peu importe  le volume de liquide considéré.  Phase 3 : Tout comme la première phase, nous nous retrouvons avec une portion cylindrique de la  bouteille. On peut donc faire un raisonnement semblable. La principale différence entre la phase 1  et la phase 3, c'est que le goulot de la bouteille (phase 3) est plus étroit que la base de la bouteille et  qu'ainsi un même volume de liquide va produire une augmentation de niveau qui est supérieure. | **Niveau de liquide dans la bouteille selon le**  **volume de liquide dans la bouteille**  **Niveau**  **de**  **liquide**  **P-3**  **P-2**  **P-1**  **P-1                                 P-2              P-3                                            Volume**  **de**  **liquide** |

**Scénario   A**

**Grandeur  prédominante  :**  Volume  de  liquide  dans  la  bouteille

**Grandeur  conséquente  :**  Niveau  de  liquide  dans  la  bouteille

**Exemple  de  phrase  d'élève  décrivant  ce  lien  entre  les  deux  grandeurs:**

<<Plus  il  y  a  de  liquide,  plus  la  hauteur  du  liquide  est  grande.>>

Il  est  possible  de  redire  cette  phrase  autrement  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié  qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon

plus  explicite:

<<Plus  le  volume  de  liquide  dans  la  bouteille  augmente,  plus  le  niveau  de  liquide  est  élevé.>>

**Représentation  de  la  situation:**

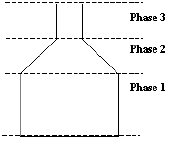
Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 47

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **Verbal** | **Graphique** |
| Phase 1 : On remarque que cette portion de la bouteille est cylindrique. Le volume est 0 lorsque le  niveau de liquide est également de 0.     Par conséquent, si on augmente le niveau du liquide, le  volume de liquide va augmenter d'une cerrainte quantité. Si on augmente une seconde fois le niveau  de liquide d'une même hauteur et qu'on demeure dans la même portion de la bouteille, le volume va  augmenter de la même quantité.     On peut faire une réflexion semblable pour différents écarts de  niveau de liquide.  Phase 2 : Cette deuxième portion de la bouteille est de forme conique. Comme à la base elle est plus  évasée, on sait que si on augmente le niveau de liquide, le volume va augmenter d'une certaine  quantité.     En raison de la forme conique, la bouteille se rétrécit et, par conséquent, si on augmente  une seconde fois le niveau de liquide d'une même hauteur, le volume va augmenter d'une quantité  inférieure à la fois précédente.     La même situation va se produire tant et aussi longtemps que nous  serons dans cette section et ce, peu importe l'augmentation du niveau de liquide considérée.  Phase 3 : Tout comme la première phase, nous nous retrouvons avec une portion cylindrique de la  bouteille. On peut donc faire un raisonnement semblable. La principale différence entre la phase 1  et la phase 3, c'est que le goulot de la bouteille (phase 3) est plus étroit que la base de la bouteille et  qu'ainsi une même augmentation du niveau de liquide va produire une augmentation de volume qui  est inférieure. | **Volume                   Volume de liquide dans la bouteille selon le**  **de                                      niveau de liquide dans la bouteille**  **liquide**  **P-3**  **P-2**  **P-1**  **Niveau**  **de**  **P-1                P-2          P-3                                                                liquide** |

**Scénario   B**

**Grandeur  prédominante  :**  Niveau  de  liquide  dans  la  bouteille

**Grandeur  conséquente  :**  Volume  de  liquide  dans  la  bouteille

**Exemple  de  phrase  d'élève  décrivant  ce  lien  entre  les  deux  grandeurs:**

<<Plus  le  liquide  est  haut,  plus  il  y  en  a.>>

Il  est  possible  de  redire  cette  phrase  autrement  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié  qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon

plus  explicite:

<<Plus  le  niveau  de  liquide  dans  la  bouteille  augmente,  plus  le  volume  de  liquide  est  élevé.>>

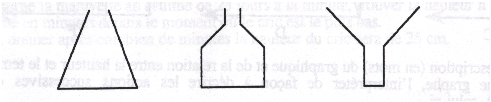
**Représentation  de  la  situation:**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 48

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Il  est  possible  de  considérer  d'autres  grandeurs  dans  l'exploitation  de  cette  situation  (diamètre  de  la  bouteille,  circonférence  de  la

bouteille,  surface  occupée  par  le  liquide  à  un  certain  niveau,  …).  Il  peut  être  intéressant  de  regarder  ces  différentes  grandeurs,  cependant

le  conflit  objet-source/objet-cible  risque  d'être  encore  plus  présent,  c'est-à-dire  qu'on  risque  de  retrouver  l'image  de  la  bouteille  (objet-

source)  dans  notre  représentation  graphique  (objet-cible).

  Construire  une  nouvelle  bouteille  en  se  servant  des  sections  de  cette  bouteille  et  construire  le  graphique  modélisant  la  nouvelle  bouteille

en  se  servant  du  graphique  de  la  première.

  Représenter  une  bouteille  à  partir  d'un  graphique.

**Exercice**

a)Tracer,  sur  un  même  repère,  les  représentations  sous  mode  graphique  de  la  hauteur  en  fonction  du  volume  correspondant  au  remplissage

des  trois  bouteilles  suivantes  en  décrivant  le  passage  de  la  situation  de  remplissage  au  tracé  du  graphique  des  trois  situations,  sans  oublier  de

justifier  les  positions  relatives  des  courbes  tracées.

**Bouteille  A** **Bouteille  B** **Bouteille  C**

b)  Tracer,  sur  un  même  repère,  les  représentations  sous  mode  graphique  du  volume  en  fonction  de  la  hauteur  correspondant  au  remplissage

des  trois  bouteilles  suivantes  en  décrivant  le  passage  de  la  situation  de  remplissage  au  tracé  du  graphique  des  trois  situations,  sans  oublier  de

justifier  les  positions  relatives  des  courbes  tracées.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 49

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 50

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Verbal** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  |  |  |  |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 5 - LE BALLON QU'ON GONFLE**

**Tableau de traduction**

Qui  n'a  jamais  assisté  à  une  fête  où  la  décoration  était  composée  de  ballons  en

caoutchouc?  Que  se  passe-t-il  réellement  lorsqu'on  souffle  dans  ces  ballons

pour  les  gonfler  jusqu'au  moment  où  le  ballon  éclate?

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes:  le  volume  d'air  dans  le  ballon,

le  temps  écoulé  depuis  le  début  du  gonflage  jusqu'à  l'éclatement  du  ballon.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Nous  avons  ici  une  situation  où  le  temps  est  la  grandeur  prédominante  mais

les  élèves  devraient  se  questionner  sur  le  déroulement  du  gonflage  :  ce  ne

sera  pas  une  situation  qui  se  modélise  rapidement  à  main  levée.

♦ Dans  cette  situation,  il  y  a  un  certain  nombre  de  phases  très  caractéristiques

qui  nous  obligent  à  réfléchir  sur  la  graduation  des  axes.

♦ Il  y  a  présence  de  paliers  dans  la  modélisation  graphique,  c'est-à-dire  qu'il  y

a  des  intervalles  où  rien  ne  change.

♦ À  un  certain  moment,  le  ballon  en  vient  à  éclater. Il  y  a  donc  des

considérations  intéressantes  à  faire  concernant  le  graphique  à  ce  moment

précis.

♦ Les  élèves  peuvent  avoir  de  multiples  interprétations  de  la  situation,  ce  qui

occasionne  des  questionnements  et  des  argumentations  dans  la  classe.  De

telles  discussions  favorisent  une  appropriation  de  la  situation  par  les  élèves,

mais  il  va  falloir  s'entendre  sur  une  interprétation  dans  le  but  d'en  faire  la

modélisation. Les  élèves  se  rendent  ainsi  compte  de  la  capacité  de

communication  qu'offre  le  graphique  mais  surtout  de  ses  limites.

♦ Le  titre  attribué  au  graphique  est  très  important  puisqu'il  doit  rendre  compte

d'une  situation  très  précise  qui  sera  représentée  par  le  graphique.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 51

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement,  c'est-à-dire  qu'il  ne  fait  que  lire  l'énoncé  du  problème  aux  élèves.  Il  ne  faut  surtout

pas,  à  ce  stade-ci,  donner  des  indices  sur  la  façon  de  varier  des  différentes  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.

2.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation. Les  phrases  prononcées  serviront  à  mettre  en

évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante,  celle  sur  laquelle  nous  nous  appuyons,  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente,  c'est-à-dire

comment  l'élève  se  positionne  pour  expliquer  la  façon  dont  réagit  une  grandeur  lorsque  nous  faisons  bouger  l'autre..  Ainsi,  on  peut

s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  le  volume  est  gros,  plus  j'ai  soufflé  longtemps.»  [Grandeur  prédominante  :  volume]

B-«Plus  ça  va,  plus  le  volume  est  grand.»  [Grandeur  prédominante  :  temps  écoulé]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  le  volume  augmente,  plus  le  temps  écoulé  depuis  le  début  du  gonflage  est  grand.»  [Grandeur  prédominante  :  volume]

B-«Plus  ça  fait  longtemps  que  je  souffle,  plus  le  volume  d'air  dans  le  ballon  est  grand.»  [Grandeur  prédominante  :  temps  écoulé]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la

phrase  B  ou  une  variante  qui  a  été  dite  puisque  c'est  la  situation

qui  est  la  plus  susceptible  de  se  produire  dans  une  classe  de

deuxième  secondaire  où  les  élèves  voient  beaucoup  les  choses  de**Volume**

manière  chronologique,  ce  qui  met  en  évidence  la  difficulté  de

"chronique"  sur  laquelle  Claude  Janvier2  a  beaucoup  travaillé.

3.  Il est maintenant possible d'identifier nos axes sur notre

**temps**

**écoulé**

représentation  graphique  :  la  grandeur  prédominante  est  placée  en

abscisse,  c'est-à-dire  sur  l'axe  horizontal,  et  la  grandeur  conséquente

est  placée  en  ordonnée,  l'axe  vertical.

2 JANVIER,  Claude,*Les  graphiques  cartésiens  :  des  traductions  aux  chroniques*  in  Les sciences de l'éducation  ,  numéro  I-3,  1993,  pages17-37.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 52

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

4.  Maintenant  que  nous  avons  déterminé  notre  grandeur  prédominante,  nous  nous  sommes  placés  dans  ;a  position  suivant  laquelle  les

élèves  s'expliquent  la  situation.  Nous  continuerons  donc  à  regarder  les  réactions  de  l'autre  grandeur,  le  volume,  en  nous  déplaçant  dans

les  différentes  valeurs  de  temps.

5.  Il  faut  s'interroger  sur  les  valeurs  possibles  que  peuvent  prendre  les  différentes  variables  et  plus  particulièrement  pour  établir  durant

combien  de  temps  cette  situation  peut  durer.  Dans  ce  cas-ci,  le  temps  va  varier  entre  0  et  un  certain  temps  où  le  ballon  va  éclater.  Le

volume,  quant  à  lui,  va  varier  entre  0  et  le  volume  maximal  que  peut  prendre  le  ballon  avant  d'éclater.  (Nous  venons  donc,  sans  le

mentionner  explicitement,  de  définir  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation  qui  nous  permettront  de  définir  le  rectangle  à  l'intérieur

duquel  devra  se  faire  la  représentation  en  mode  graphique.)

6.  L'enseignant  demande  alors  aux  élèves  de  tracer  le  graphique  qui  représente  leur  interprétation  de  la  situation  et  d'être  attentifs  à  la

graduation  des  axes.  Pendant  que  les  élèves  travaillent,  l'enseignant  circule  dans  la  classe  afin  d'identifier  différents  types  de  graphiques

(droite  passant  par  l'origine,  courbe  incurvée  vers  le  haut,  fonction  en  escalier,  paliers,  …)  faits  par  les  élèves.  Il  distribue  des  acétates  à

certains  étudiants  afin  de  les  amener,  un  peu  plus  tard,  à  expliquer  au  reste  de  la  classe  comment  ils  ont  tracé  leur  graphique.

7.  L'enseignant  demande  aux  étudiants  présélectionnés  de  venir  présenter,  à  tour  de  rôle,  leur  modélisation  graphique  à  l'avant  de  la  classe.

Il  faut  surtout  s'assurer  qu'il  y  ait  concordance  entre  la  verbalisation  de  la  situation  qui  est  faite  et  le  graphique  tracé  par  l'élève.

8.  Il  risque  d'y  avoir  beaucoup  de  contestations  des  différentes  analyses  de  la  situation  mises  de  l'avant  dans  chacune  des  représentations

graphiques.  Il  ne  faut  surtout  pas  chercher  à  clore  le  débat  trop  rapidement  puisque  ces  discussions  permettent  aux  élèves  de  voir  la

situation  de  différentes  façons,  ce  qui  fait  que  le  titre  du  graphique  va  avoir  énormément  d'importance  puisqu'il  va  servir  à  signifier

quelle  analyse  de  la  situation  est  privilégiée. Cependant,  comme  notre  but  n'est  pas  de  faire  une  étude  complète  de  la  situation,

l'enseignant  devra  trancher  et  déterminer  l'interprétation  qui  sera  privilégiée  pour  en  faire  la  traduction  sous  mode  graphique.

9.  Exemple  d'interprétation  :  Il  y  a  deux  phases  qui  vont  se  répéter  un  certain  nombre  de  fois  de  façon  identique  (ou  peut-être  pas).  Dans  la

première,  on  souffle  de  l'air  dans  le  ballon,  ce  qui  fait  augmenter  le  volume.  Dans  la  deuxième,  on  pince  le  ballon  et  on  reprend  notre

souffle.  Les  élèves  peuvent  donc  visualiser  que  durant  cette  phase,  le  volume  "ne  bouge  pas".  Nous  leur  apprendrons  à  dire  que  le

volume  "demeure  constant".  Cette  phase  peut  donc  être  plus  ou  moins  longue.  Supposons  donc  que  nous  soufflons  quatre  fois  dans  le

ballon  avant  que  celui-ci  atteigne  son  volume  maximal  et  éclate. Représentons  ces  phases  sur  l'axe  des  abscisses  de  même  que  les

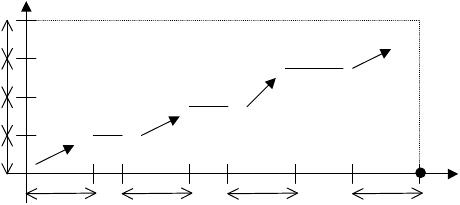
accroissements  de  volume  sur  l'axe  des  ordonnées.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 53

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Volume** **Volume  d'air  dans  le  ballon  selon  le  temps**

**temps**

**souffle  1** **souffle  2** **souffle  3** **souffle  4**

10.  Nous  savons  qu'à  chaque  souffle,  le  volume  croît  et  qu'entre  deux  souffles,  le  volume  reste  constant.  Après  le  quatrième  souffle,  comme

le  ballon  éclate,  le  volume  redevient  nul.  Une  question  se  pose  ici  :  doit-on  faire  une  trait  vertical  qui  relie  les  deux  points?

Les  flèches  obliques  qui  se  retrouvent  dans  la  représentation  graphique  ci-contre  ne  servent  pas  à  situer  des  points,  mais  plutôt  à  indiquer

la  variation  des  grandeurs  sur  un  certain  intervalle.  Nous  savons  que  nous  nous  déplaçons  "de  gauche  à  droite  vers  le  haut",  mais  nous  ne

savons  pas  précisément  de  quelle  façon.

**Volume** **Volume  d'air  dans  le  ballon  selon  le  temps**

**temps**

**souffle  1** **souffle  2** **souffle  3** **souffle  4**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 54

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

11.  Finalement,  nous  allons  nous  intéresser  à  la  façon  dont  varie  plus  précisément  le  volume  dans  les  phases

de  «souffle».  Si  le  temps  où  la  personne  souffle  est  partagé  en  deux  intervalles  de  même  grandeur,  nous**V**

pouvons  constater  que  dans  la  première  partie,  nous  avons  beaucoup  de  souffle  alors  le  volume  augmente

d'une  certaine  quantité.  Dans  la  seconde  partie,  nous  avons  moins  de  souffle  et  le  ballon  offre  plus  de

résistance.  Pour  ces  raisons,  le  volume  augmente  moins.  Pour  modéliser  graphiquement  cela,  nous  allons

partager  l'intervalle  de  temps  sur  l'axe  des  abscisses  en  deux  parties  égales.  Nous  pouvons  donc  observer

une  courbe  incurvée  vers  le  bas  pour  l'intervalle  de  temps  correspondant  au  souffle..

**t**

**souffle**

**Volume  d'air  dans  le  ballon  gonflé  par  Andréanne  selon  le  temps**

**Volume**

**temps**

**souffle  1** **souffle  2** **souffle  3** **souffle  4**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 55

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  En  devoir,  demander  aux  élèves  de  souffler  un  ballon  et  de  faire  le  graphique  correspondant.  Comme  le  graphique  rend  compte  d'une

façon  précise  selon  laquelle  la  situation  se  déroule,  le  titre  du  graphique  va  avoir  énormément  d'importance  pour  l'interprétation  qui  en

sera  faite  éventuellement.

  Dans  les  magasins*Dollarama*,  il  se  vend  des  pompes  pour  gonfler  les  ballons  pour  la  modique  somme  de  1$  de  même  que  des  sacs  qui

contiennent  une  vingtaine  de  ballons  pour  le  même  prix.  Il  est  donc  possible  de  comparer  de  façon  qualitative  la  variation  du  volume

selon  la  technique  de  gonflage  utilisée.

  Avec  un  peu  plus  de  budget,  il  est  aussi  possible  d'observer  ce  qui  se  produit  lorsqu'on  gonfle  un  ballon  à  partir  d'un  gaz  comprimé

(hélium  par  exemple).

  Calculer  le  nombre  de  souffles  utilisés  par  différents  élèves  pour  rendre  un  ballon  à  son  volume  maximal  et  réfléchir  sur  les  différences

qu'il  y  aurait  entre  les  différents  graphiques  représentant  chacun  des  cas.  Peut-être  peut-on  ici  faire  un  lien  avec  la  capacité  respiratoire

en  biologie  humaine  de  3e  secondaire?

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 56

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  | **X** |  |  |  |  |
| **Verbal** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 6 - LA COURSE EN TAXI**

**Tableau de traduction**

On  prend  le  taxi  pour  se  rendre  au  Jardin  Botanique  de  Montréal  (la  distance

totale  est  de  5km).  On  de  dispose  que  de  5,00$.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  coût  de  notre  course  en  taxi

et  à  la  distance  parcourue.  Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Dans  cette  situation  ,  le  temps  est  omniprésent,  mais  il  ne  constitue  pas  une

variable  explicite  dans  la  situation.

♦ C’est  une  situation  où  la  représentation  est  «  en  escalier  »,  donc  la  courbe

ne  se  fait  pas  d’un  seul  trait,  il  faut  réfléchir  à  la  situation  pour  bien  la

représenter  graphiquement.  De  plus,  on  introduit  une  nouvelle  convention

pour  signifier  qu’un  point  appartient  à  la  situation  (point  plein)  ou

n’appartient  pas  à  la  situation  (point  vide).

♦ Cette  situation  laisse  place  à  beaucoup  de  discussion  sur  la  façon  de  varier

et  elle  est  intéressante  en  ce  sens.  En  effet,  le  taxi  n’est  pas  un  moyen  de

transport  très  connu  des  élèves  et,  par  conséquent,  il  faudra  s’entendre  sur

le  fonctionnement  d’un  taxi  afin  de  mettre  en  évidence  le  fait  que  le  coût

augmente  par  bonds  de  5¢  et  qu’il  y  a  un  tarif  de  base  au  départ.

♦  Contrairement  à  la  majorité  des  autres  situations,  on  ne  peut  pas  vraiment

utiliser  les  marches-états  pour  construire  la  modélisation  graphique

puisqu’il  n’y  a  pas  de  points-repères  à  proprement  parler  sauf  peut-être

l’ordonnée  à  l’origine.  Il  faudra  donc  illustrer  la  course  en  taxi  par  des

marches  d’accroissement  et  ne  pas  hésiter  à  laisser  des  traces  de  notre

explication  dans  le  graphique.

♦ Comme  il  y  a  plusieurs  courses  en  taxi  qui  sont  possible,  le  titre  du

graphique  devra  mettre  clairement  en  évidence  de  quelle  course  il  s'agit

puisque  le  graphique  est  en  lien  avec  la  description  verbale  qui  a  été  faite

pour  un  cas  en  particulier.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 57

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

Devoir  préalable  :  Demander  aux  élèves  de  s'informer  sur  la  façon  dont  fonctionne  le  compteur  d'un  taxi.

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement,  c'est-à-dire  qu'il  ne  fait  que  lire  l'énoncé  du  problème  aux  élèves.  Il  ne  faut  surtout

pas,  à  ce  stade-ci,  donner  des  indices  sur  la  façon  de  varier  des  différentes  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.

2.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation. Les  phrases  prononcées  serviront  à  mettre  en

évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente,  donc  la  façon  dont  l'élève  analyse  la  situation.  Ainsi,

on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  je  vais  loin,  plus  ça  coûte  cher.»  [Grandeur  prédominante  :  distance  parcourue]

B-«Plus  ça  coûte  cher,  plus  je  suis  loin.»  [Grandeur  prédominante  :  coût]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  distance  parcourue  augmente,  plus  le  coût  de  la  course  en  taxi  est  élevé.»  [Grandeur  prédominante  :  distance  parcourue]

B-«Plus  le  coût  de  la  course  en  taxi  augmente,  plus  la  distance  parcourue  depuis  le  départ  est  élevée.»

[Grandeur  prédominante  :  coût]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  l'expérience  va  nous  convaincre  de

privilégier  la  phrase  A  ou  une  variante.

3.  Maintenant que nous avons choisi notre grandeur

prédominante,  il  est  possible  d'identifier  nos  axes  sur  notre

représentation  graphique  :  la  grandeur  prédominante  est  placée

en  abscisse  et  la  grandeur  conséquente  est  placée  en  ordonnée.

**Coût  ($)** **Le  coût  d'une  course  en  taxi  selon  la  distance  parcourue**

**distance**

**parcourue  (m)**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 58

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

4.  Maintenant,  il  faut  s'interroger  sur  les  valeurs  possibles  que  peuvent  prendre  les  différentes  variables. Dans  ce  cas-ci,  la  distance

parcourue  va  varier  entre  0  et  la  distance  totale  du  trajet,  c'est-à  dire  5  km.  Le  coût,  quant  à  lui,  va  varier  entre  le  tarif  minimal  lorsqu'on

entre  dans  le  taxi  et  le  coût  total  de  notre  course  en  taxi  qui  ne  peut  pas  dépasser  5,00$.  Cependant  toutes  les  valeurs  de  coûts  ne  sont  pas

possibles  puisque  le  compteur  d'un  taxi  varie  selon  des  augmentations  de  0,05$.  (Nous  venons  donc,  sans  le  mentionner  explicitement,

de  définir  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation.)  Nous  pouvons  donc  graduer  notre  axe  des  abscisses  aux  200  mètres  (puisque  la

course  en  taxi  qui  nous  intéresse  n'est  que  de  quelques  kilomètres.  Notre  axe  des  ordonnées,  pour  sa  part,  sera  gradué  aux  0,05$.  On

peut  également  faire  remarquer  que  pour  n'importe  quelle  valeur  de  distance,  il  peut  y  avoir  plus  d’un  coût  associé(si  le  taxi  est

immobilisé  à  une  intersection  par  exemple).  (On  introduit  donc  implicitement  la  différence  entre  relation  et  fonction  qui  sera  abordée  en

quatrième  secondaire.)

5.  L'enseignant  demande  aux  élèves  de  faire  une  modélisation  graphique  de  la  situation.  Pendant  que  les  élèves  travaillent,  l'enseignant

circule  dans  la  classe  afin  d'identifier  différents  types  de  graphiques  et  il  distribue  des  acétates  à  certains  étudiants  afin  qu'ils  reproduisent

leur  graphique.

6.  L'enseignant  demande  aux  étudiants  présélectionnés  de  venir  présenter  leur  modélisation  graphique  à  l'avant  de  la  classe.  L'enseignant

demande  ensuite  aux  étudiants  qui  présentent  leur  graphique  (ou  à  d'autres  qui  ont  fait  le  même  graphique)  d'expliquer  leur  interprétation

de  la  situation  et  de  justifier  l'allure  de  la  courbe  sur  le  graphique.  Dans  chaque  verbalisation,  s'assurer  de  la  cohérence  entre  ce  qui  est

dit  et  ce  qui  est  vu  sur  le  graphique.

7.  Il  risque  d'y  avoir  beaucoup  de  contestations  des  différentes  analyses  de  la  situation  mises  de  l'avant  dans  chacune  des  représentations

graphiques.  Il  ne  faut  surtout  pas  chercher  à  clore  le  débat  trop  rapidement  puisque  ces  discussions  permettent  aux  élèves  de  voir  la

situation  de  différentes  façons.  Cependant,  comme  notre  but  n'est  pas  de  faire  une  étude  complète  de  la  situation,  l'enseignant  devra

trancher  et  déterminer  l'interprétation  qui  sera  privilégiée  pour  en  faire  la  traduction  sous  mode  graphique.  Nous  allons  d’abord  chercher

à  expliquer  de  quelle  façon  le  coût  varie  dans  un  taxi.  À  quoi  le  compteur  du  taxi  est-il  réellement  relié?  Est-ce  que  le  coût  augmente

pour  un  intervalle  régulier  de  temps,  de  distance,  de  consommation  d’essence  ou  d’autre  chose?

8.  Nous  fixons  d’abord  le  prix  de  base  lorsque  nous  entrons  dans  le  taxi.  Il  s’agit  de  notre  ordonnée  à  l’origine.  Nous  représentons  ensuite

un  segment  horizontal  pour  toute  les  distances  où  le  coût  est  demeuré  fixe.  Rendu  à  une  certaine  distance,  le  coût  augmente  brusquement

de  5¢.  Vis-à-vis  cette  distance,  il  y  aura  donc  un  point  vide  sur  le  graphique  associé  au  coût  précédent  et  un  point  plein  associé  au

nouveau  coût.  De  la  même  façon,  nous  poursuivons  la  représentation  graphique  de  notre  situation.  Lorsque  la  voiture  est  immobile,  il  se

peut  que  le  coût  augmente  plus  d’une  fois;  nous  représentons  alors  chacune  de  ses  hausses  par  une  série  de  points  pleins  distincts  alignés

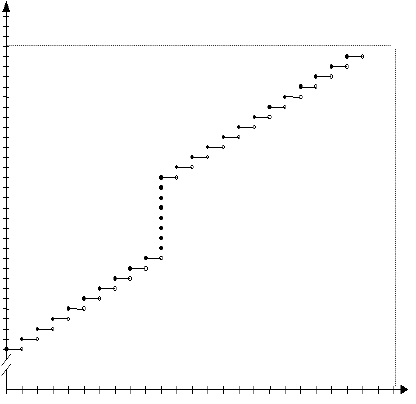
à  la  verticale  sur  le  graphique  puisque  la  distance  parcourue  demeure  la  même. Chaque  course  en  taxi  est  unique  et  a  sa  propre

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 59

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

modélisation  graphique.  Maintenant  que  nous  avons  décrit  brièvement  la  façon  de  tracer  le  graphique  représentant  une  telle  situation,

examinons  une  course  en  taxi  bien  précise.

***La  course  en  taxi  de  Clémentine***

*Lorsque  Clémentine  embarque  dans  le  taxi,  à*

*l’intersection  du  boulevard  Saint-Laurent  et  de  la*

*rue  Sainte-Catherine,  le  chauffeur  met  le  compteur  à*

*3,50$.*

*Après  deux  kilomètres,  le  taxi  arrive  au  coin  de*

*Papineau  et,  comme  le  feu  de  circulation  est  rouge,*

*reste* *immobile* *durant* *deux* *minutes* *(le* *coût*

*continue  d’augmenter).*

*Lorsque  le  feu  tourne  au  vert,  le  chauffeur  tourne  à*

*gauche  sur  Papineau  et  continue  en  ligne  droite*

*jusqu’à  Sherbrooke(1,6  km).* *Par  chance,  tous  les*

*autres  feux  de  circulation  qu’il  franchit  sont  verts.*

*Il  tourne  à  droite  sur  Sherbrooke  en  direction  du*

*Jardin  Botanique.  Il  a  alors  un  peu  moins  de  chance*

*puisqu’il* *doit* *s’arrêter* *aux* *intersections* *des*

*boulevards  Saint-Michel  et  Pie-IX.(1km).*

*À  l’intersection  de  Pie-IX,  le  passager  décide  de*

*payer  la  note  et  de  poursuivre  à  pieds.*

**Le  coût  de  la  course  en  taxi  de  Clémentine  selon  la  distance  qu'elle  a  parcourue**

**Coût($)**

5,00$

4,50$

4,00$

3,50$

**distance**

0        1000      2000      3000      4000      5000**parcourue  (m)**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 60

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Se  servir  de  cette  situation  pour  distinguer  relation  et  fonction  en  quatrième  secondaire.

  Modifier  certaines  grandeurs  dans  la  description  de  la  course  en  taxi  et  observer  l’effet  sur  le  graphique.  Par  exemple,  il  est  possible  de

modifier  :  la  valeur  des  bonds  pour  le  coût  (10¢  plutôt  que  5¢),  le  coût  initial,  le  coût  maximal  avant  que  le  passager  débarque  et

poursuive  sa  route  à  pieds,  la  distance  qu’on  peut  parcourir  avant  que  le  coût  n’augmente,…

  Demander  à  chaque  élève  d’inventer  le  déroulement  de  sa  propre  course  en  taxi  et  de  le  décrire  pour  qu’un  de  ses  pairs  puisse  représenter

graphiquement  la  course  décrite.

  Pourquoi  ne  pas  faire  une  entrevue  avec  un  chauffeur  de  taxi  afin  de  le  questionner  sur  ce  qu'il  vit  lorsqu'il  conduit,  lorsqu'il  est  coincé

dans  un  bouchon  de  circulation,  etc.

  Demander  aux  élèves  de  trouver  d’autres  situations  de  la  vie  courante  où  la  variation  est  en  escalier  comme  celle  de  la  course  en  taxi

(ex.:parcomètre).

  Si  on  fait  le  graphique  du  coût  selon  la  distance  et  un  second  graphique  de  la  distance  selon  le  temps,  il  est  possible  de  travailler  la

***composée de fonctions***  (même  si  nous  n’avons  pas  véritablement  des  fonctions  dans  chaque  cas)  tout  en  regardant  avec  les  élèves  l'effet

temps  qui  les  perturbe.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 61

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 62

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** | **X** |  | **X** | **X** |  |  |
| **Verbal** | **X** | **X** | **X** | **X** | **X** |  |
| **Schéma** |  |  | **X** |  |  | **X** |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **X** | **X** |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  | **X** |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 7 - LE TRAIT SUR LE MUR**

**Tableau de traduction**

Il  y  a  une  ligne  sur  le  mur.  Un  observateur  l'observe  en  regardant  dans  un  tuyau

en  carton.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes:  la  longueur  du  tuyau,  la

longueur  du  segment  perçu  en  regardant  dans  le  tuyau.

Comment  ces  deux  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Comme  ce  n'est  pas  une  situation  de  la  vie  courante,  le  recours  à

l'expérience  est  primordial  pour  permettre  aux  élèves  de  s'approprier  la

situation.

♦ Par  la  réalisation  de  l'expérience,  il  est  possible  d'observer  la  façon  dont  les

élèves  vont  contrôler  la  grandeur  prédominante.  Si  nous  supposons  qu'il

s'agit  de  la  longueur  du  tuyau,  il  serait  donc  possible  d'observer  des  élèves

qui  réduisent  la  taille  du  tuyau  d'une  longueur  constante,  mais  étrangement

il  y  a  de  plus  fortes  chances  pour  que  les  élèves  procèdent  en  y  allant  de

moitié  en  moitié  de  la  longueur.

♦ Présence  de  plusieurs  grandeurs  dans  la  situation,  donc  sensibilisation  à  la

notion  de  paramètre  qui  est  travaillée  en  quatrième  secondaire.

♦ Cette  situation  constitue  un  premier  contact  avec  la  proportionnalité

inverse.  (On  lit  et  on  entend  également  :  "les  grandeurs  varient  en  sens

contraire".)

♦ La  modélisation  formelle  est  accessible  aux  élèves  de  deuxième  secondaire

puisqu'ils  ont  étudié  l'homothétie  et  sont  donc  en  mesure  d'établir  les

rapports  de  mesures  des  côtés  homologues.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 63

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 52

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 53

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 54

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 55

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 56

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 57

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 58

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 59

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 60

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 61

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 62

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 63

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves

eux-mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes.  Nous  pouvons  nous  attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  la  longueur  du

tuyau,  le  diamètre  (ou  le  rayon)  du  tuyau,  la  longueur  perçue  du  trait  sur  le  mur,  la  distance  horizontale  entre  l'observateur  et  le

mur,  la  distance  entre  le  bout  du  tuyau  et  le  mur,  …

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence

quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente. Ainsi,  on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases

différentes:

A-«Plus  le  tuyau  est  long,  plus  la  ligne  que  je  vois  est  courte.»  [Grandeur  prédominante  :  longueur  du  tuyau]

B-«Plus  la  ligne  est  longue,  plus  le  tuyau  est  court.»  [Grandeur  prédominante  :  longueur  du  trait  sur  le  mur]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié  qui

fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  longueur  du  tuyau  diminue,  plus  la  longueur  du  trait  sur  le  mur  que  je  vois  est  grande.»

[Grandeur  prédominante  :  longueur  du  tuyau]

B-«Plus  la  longueur  du  trait  sur  le  mur  que  je  vois  augmente,  plus  la  longueur  du  tuyau  que  je  dois  utiliser  est  petite.»

[Grandeur  prédominante  :  longueur  du  trait  sur  le  mur]

\*Nous  verrons  bientôt  pourquoi  la  phrase  A  est  celle  qui  a  le  plus  de  sens  dans  le  contexte  de  cette  situation.  Nous  avons  donc  fait  une

traduction  verbal-verbal  puisque  l'élève  décrit  verbalement  son  analyse  d'une  situation  qui  a  été  présentée  verbalement  au  départ.

4.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  déterminer  quelles  valeurs  nous  risquons

d'observer  vraisemblablement  dans  cette  situation.  (Nous  nous  questionnons  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation

sans  le  mentionner  explicitement.)  Pour  ce  qui  est  de  la  longueur  du  tuyau,  elle  sera  définie  dans  les  réels  positifs,  c'est-à-dire  de  0

à  une  certaine  longueur  maximale  correspondant  au  tuyau  utilisé.  La  longueur  du  trait  que  nous  percevons  sur  le  mur,  quant  à  elle,

va  varier  entre  le  diamètre  de  notre  tuyau  (c'est  la  plus  petite  longueur  de  trait  possible  si  on  considère  que  l'extrémité  du  tuyau

touche  au  mur)  et  une  longueur  infinie  (s'il  n'y  a  pas  de  tuyau,  notre  œil  a  un  champ  de  vision  de  180º  et  voit  toute  cette  ligne

verticale  ).  Comme  nous  avons  une  dimension  infinie,  nous  ne  pourrons  pas  délimiter  notre  graphique  par  un  cadre  rectangulaire

comme  c'était  le  cas  dans  les  autres  situations.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 64

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

5.  Demander  aux  élèves  de  faire  une  première  ébauche  du  graphique  qui  représenterait  cette  situation  en  lien  avec  leur  hypothèse  (étape  3).

6.  Par  questionnement,  l'enseignant  peut  faire  ressortir  un  certain  nombre  d'hypothèses  émises  par  les  élèves  et  mettre  en  évidence  la

nécessité  de  vérifier  ces  hypothèses  afin  de  bien  voir  laquelle  ou  lesquelles  correspondent  à  la  réalité.

7.  Pour  vérifier  les  différentes  hypothèses,  nous  allons  maintenant  réaliser  l'expérience  (cela  pourrait  également  être  fait  en  devoir).  Le

matériel  dont  nous  avons  besoin  pour  cette  expérience  est  minime:  un  tuyau  en  carton(tuyau  de  papier  d'emballage,  tuyau  pour  conserver

des  affiches,…),  un  trait  sur  le  mur(ruban-cache)  et  un  mètre  ou  un  ruban  à  mesurer  (il  à  noter  que  nous  pourrions  également  réaliser

cette  expérience  sans  jamais  relever  de  données  numériques).  Dans  le  but  de  respecter  les  principes  en  didactique  des  sciences,  il  est

important  que  le  protocole  expérimental  soit  défini  par  les  élèves  eux-mêmes.  Il  est  primordial  de  faire  réaliser  aux  élèves  que  leur

démarche  expérimentale  met  en  évidence  qu'elle  est  la  grandeur  prédominante  dans  leur  façon  d'aborder  la  situation  puisqu'il  s'agit  de  la

grandeur  qu'ils  contrôlent.  Dans  le  cas  qui  nous  intéresse  présentement,  c'est  la  longueur  du  tuyau  que  les  élèves  font  varier,  il  s'agit

donc  de  la  grandeur  prédominante.  La  longueur  du  trait  perçue  sur  le  mur  est  donc  la  grandeur  conséquente.  Il  serait  beaucoup  plus

difficile,  voire  même  impossible,  de  sélectionner  une  longueur  de  trait  sur  le  mur  pour  ensuite  ajuster  la  longueur  de  son  tuyau  en

conséquence.  (C'est  pour  cette  raison  que  la  phrase  A  doit  être  privilégiée  à  l'étape3.)

8.  Il  serait  possible  de  passer  immédiatement  à  la  représentation  sous  mode  graphique  en  utilisant  un  report  de  segments  directement  de

l'expérience,  mais  il  est  aussi  possible  que  les  élèves  aient  préféré  faire  tout  d'abord  un  relevé  des  résultats  obtenus  en  cours  d'expérience.

Les  valeurs  notées  au  cours  de  l'expérience  constituent  une  liste  de  valeurs.  Pour  les  représenter  dans  un  tableau  de  valeurs,  il  faudra

s'assurer  que  toutes  les  conventions  relatives  à  cet  outil  de  représentation  soient  respectées  :  grandeur  prédominante  avant  la  grandeur

conséquente,  valeurs  de  la  grandeur  prédominante  placées  en  ordre  croissant,  …

\*Un  exemple  de  tableau  de  valeurs  se  retrouve  à  la  page  suivante  tiré  d'une  expérience  où  l'observateur  était  situé  à  210cm  du  mur  et

utilisait  un  tuyau  en  carton  servant  à  conserver  les  affiches  dont  le  diamètre  était  de  5cm.  Ces  valeurs  constituent  donc  des  paramètres  de

l'expérience.

\*\*Si  nous  réfléchissons  un  peu  sur  la  démarche  expérimentale  utilisée  (traduction  expérience-expérience),  nous  remarquons  que

l'expérimentateur  a  contrôler  la  longueur  du  tuyau  selon  des  variations  de  grandeur  de  5cm.  Nous  pouvons  le  remarquer  dans  le  tableau

de  valeurs  de  la  page  suivante.  Il  peut  être  très  intéressant  d'observer  la  façon  dont  les  élèves  ont  contrôler  la  variation  de  la  longueur  du

tuyau;  dans  certains  cas,  il  se  peut  que  les  valeurs  doublent  (l'élève  aura  alors  coupé  chaque  tuyau  en  deux  parties  égales)  ou  bien  il  est

possible  que  les  élèves  ne  se  soient  pas  donner  de  règle  précise  pour  modifier  la  longueur  du  tuyau  afin  de  pouvoir  mieux  contrôler  une

régularité  dans  la  variation  de  la  longueur  du  trait  perçu  sur  le  mur.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 65

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **Longueur  du  tuyau  (cm)** | **Longueur  du  trait  (cm)** |
| 5 | 203 |
| 10 | 108 |
| 15 | 75,5 |
| 20 | 57 |
| 25 | 47 |
| 30 | 40 |
| 35 | 33 |
| 40 | 27 |
| 45 | 26,5 |
| 50 | 26 |
| 55 | 20 |
| 60 | 21,5 |
| 65 | 19 |
| 70 | 17 |
| 75 | 16,5 |
| 80 | 15 |

\*\*\*Le  fait  de  contrôler  la  variation  de  la  longueur  du  tuyau  nous  permet  ici  de  nous  concentrer  sur  l'observation  de  la  variation  de  la

longueur  du  trait  afin  de  rechercher  une  certaine  régularité.

**Longueur  du  trait  perçu  sur  le  mur  selon  la  longueur  du  tuyau  utilisé**

+5

+5

Traduction tableau-

tableau : nous

représentons les

accroissements qui

ne sont pas

perceptibles à prime

abord lorsque nous

regardons le tableau

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

+5

9.  Nous  disposons  ici  d'un  tableau  de  valeurs,  nous  allons  l'utiliser  pourpasser  à  la  représentation  sous  mode  graphique  de  notre  situation.

Comme  nous  nous  sommes  entendus  pour  dire  que  c'est  la  longueur  du  tuyau  qui  est  notre  grandeur  prédominante,  nous  allons  la  mettre

en  abscisse  tandis  que  la  longueur  du  trait  perçue  sera  en  ordonnée.  Si  nous  réfléchissons  aux  graduations  de  nos  axes.  Pour  la  longueur

du  tuyau,  chaque  graduation  représentera  5  cm  puisque  c'est  la  façon  dont  nous  avons  fait  varier  cette  grandeur  lors  de  la  réalisation  de

notre  expérience.  Les  graduations  pour  la  longueur  du  trait  demandent  un  peu  plus  de  réflexion  puisque  nos  données  ne  varient  pas  de

façon  constante  et  qu'elles  sont  très  étendues  (de  15  cm  à  203  cm)  et  demandent  une  précision  de  0,5cm.  Si  on  suppose  que  nous  n'avons

pas  de  règle  pour  tracer  notre  graphique,  il  faut  de  plus  trouver  des  graduations  qui  se  partagent  bien  à  l'œil  (division  par  2  ou  3).  Une

des  possibilités  qui  s'offre  à  nous  est  de  faire  des  graduations  qui  représentent  8cm  (nous  pourrons  ainsi  obtenir  des  graduations

secondaires  de  4cm,  2cm,  1cm,  0,5cm).

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 66

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Longueur  du  trait

perçue  (cm)

208

200

192

184

176

168

160

152

144

136

128

120

112

104

96

88

80

72

64

56

48

40

32

24

16

**Longueur  du  trait  perçue  sur  un  mur  selon  la  longueur  du  tuyau  utilisé**

8

0

0

5    10   15   20   25

30

35

40   45    50

55         65    70   75

60

80

Longueur  du

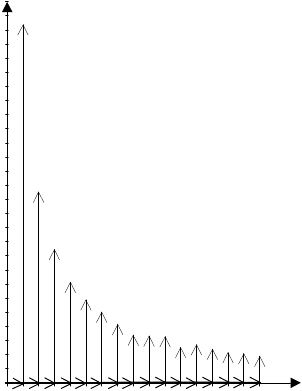
tuyau  (cm)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 67

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

10.  Nous  allons  maintenant  placer  un  certain  nombre  de  points  dans  notre

graphique  en  se  servant  des  marches-états.  Ainsi,  pour  chaque  couple

de  valeurs  porté  dans  le  tableau  de  valeurs  de  la  page  précédente,  nous trait  perçue  (cm)

allons  tout  d'abord  nous  déplacer  horizontalement  sur  l'axe  des  abscisses

d'une  valeur  correspondant  à  notre  première  coordonnée  pour  ensuite

nous  déplacer  verticalement  sur  l'axe  des  ordonnées  d'une  valeur

Longueur  du

208

correspondante  à  notre  deuxième  coordonnée. Par  exemple,  si  nous

voulons  placer  un  premier  point,  nous  savons  que  la  longueur  mesurée

du  tuyau  est  de  5  cm  et  que  la  longueur  mesurée  du  trait  est  de  203  cm.

Donc,  nous  partons  de  l'origine  de  notre  plan  cartésien  et  nous  nous

déplaçons,  sur  l'axe  des  abscisses,  d'un  segment  orienté  de  cinq  unités

vers  la  droite  (jusqu'à  la  première  graduation)  et  nous  nous  déplaçons

ensuite  verticalement  d'un  second  segment  orienté  de  203  unités  vers  le

haut.  Nous  pourrons  donc  subdiviser  notre  graduation  en  8  graduations

secondaires  pour  déterminer  précisément  la  position  de  la  valeur  203

cm.  Nous  procéderons  de  manière  similaire  pour  localiser  nos  autres

points.

11.  Les  élèves  pourraient  être  tentés  de  relier  immédiatement  les  points  que

nous  avons  positionnés  par  des  segments  orientés. Il  ne  faut  pas  les

laisser  faire.  On  ne  relie  jamais  des  points  sans  avoir  fait  une  réflexion

au  préalable. Nous  pouvons  dire  que  la  longueur  du  tuyau  (notre

domaine)  est  une  grandeur  qui  est  continue  puisque  pour  n'importe

quelle  valeur  située  entre  deux  valeurs  utilisées  dans  l'expérience,  il

serait  possible  d'avoir  un  tuyau  de  cette  longueur  pour  observer  notre

trait. De  façon  générale,  on  remarque  que  plus  la  longueur  du  tuyau

augmente,  plus  la  longueur  du  trait  perçue  diminue.  Nous  pouvons  sans

180

172

168

160

152

144

136

128

120

112

104

96

88

80

72

64

56

4048

32

24

16

8

0

0

5     10 15 20 25 30 35 40 45 50     55 60 65 70 75 80  Longueur  du

tuyau  (cm)

l'ombre  d'un  doute  affirmer  qu'il  en  est  de  même  entre  chacun  de  nos  points. Il  serait  donc  possible  de  tracer  une  courbe  qui

représenterait  notre  situation  de  façon  générale  en  passant  par  nos  points  (il  est  possible  de  le  faire  à  main  levée).

\*Il  est  à  noter  cependant  que  certaines  erreurs  expérimentales  semblent  s'être  glissées  dans  notre  expérience  puisque  les  points  que  nous

avons  placés  pour  des  longueurs  de  tuyau  variant  entre  50  et  65  cm  ne  semblent  pas  vraiment  suivre  l'allure  générale  suggérée  par  les

autres  points.  Il  serait  donc  possible  de  tracer  la  courbe  en  négligeant  ces  derniers.  Le  fait  que  nos  mesures  ne  soient  pas  précises  nous

oblige  donc  à  tracer  une  courbe  qui  n'est  qu'approximative.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 68

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

12.  Examinons  maintenant  la  situation  de  plus  près  afin  de  voir  s'il  est  possible  de  la  modéliser  formellement  en  représentant  tout  d'abord

diamètre  du  tuyau                                   longueur  du  trait  perçue

cette  situation  de  façon  schématique. Il  est  à  noter  cependant  que  les  élèves  doutent  que  cette  représentation  soit  représentative  de

l'expérience  réelle.

Observateur

tuyau  en  carton

par  l'observateur

longueur  du

tuyau

distance  entre  l'extrémité  du  tuyau  et  le  mur

Trait  sur  un  mur

distance  entre  l'œil  de  l'observateur  et  le  mur

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 69

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Les  lignes  pointillées  représentent  le  champ  de  vision  de  notre  observateur  lorsqu'il  regarde  par  le  tuyau:  il  faut  remarquer  que  les  deux

lignes  se  touchent  en  un  même  point  dans  l'œil  de  l'observateur  et  qu'elles  frôlent  les  extrémités  de  l'ouverture  de  notre  tuyau  en  carton.

Nous  allons  maintenant  faire  une  traduction  schéma-schéma  puisque  nous  allons

schématiser  de  façon  plus  précise  les  triangles  que  nous  pouvons  observer  dans  le  schéma

précédent.

Si  nous  observons  le  schéma  plus  attentivement,  il  est  possible  de  remarquer  que  nous

diamètre du

tuyau

avons  deux  triangles  semblables  comme  c'était  le  cas  dans  la  situation  sur  les  ombres  et  que

nous  avons  donc  une  situation  d'homothétie  encore  une  fois. Il  nous  est  donc  possible

d'établir  l'égalité  des  rapports  des  mesures  des  segments  homologues  de  ces  deux  triangles.

Ainsi,  nous  avons  donc:

longueur du trait

perçu par

l'observateur

base  du grand  triangle  hauteur du grand triangle

base  du   petit triangle

hauteur  du petit  triangle



longueur du

tuyau

distance horizontale entre

l'œil de l'observateur et le

mur

**longueur du trait**

**diametre** **du** **tuyau**



**distance de l' observateur au mur**

**longueur     du     tuya**

Nous  allons  maintenant  faire  une  petite  manipulation  algébrique  (traduction  formel-formel)  afin  d'isoler  notre  grandeur  conséquente

**longueur** **du** **trait**   **distance  de  l'observateur  au  mur**

(la  longueur  du  trait  perçue):

**longueur  du  tuyau** *x***diametre** **du** **tuyau**

Si  on  remplace  nos  grandeurs  fixées  par  les  valeurs  utilisées  pour  l'expérience,  nous  avons  donc:

**longueur** **du** **tuyau**

**longueur** **du** **trait**         210*cm*

*x*5*cm*

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 70

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Il  est  possible  de  retravailler  cette  situation  de  façon  plus  approfondie  en  troisième  secondaire  et  en  cinquième  secondaire  lorsque  nous

traitons  des  situations  inversement  proportionnelles.

  Il  est  possible  d'observer  l'impact  des  différents  paramètres  en  faisant  varier  les  autres  grandeurs,  à  savoir  le  diamètre  du  tuyau  et  la

distance  séparant  l'observateur  du  mur.  Doit-on  tout  recommencer  pour  avoir  de  nouvelles  mesures  ou  peut-on  trouver  une  manière

efficace  de  tirer  partie  de  ce  que  l'on  a  déjà  comme  tableau  et  graphique?

  Pour  bien  comprendre  la  représentation  schématique  qui  est  faite  de  la  situation,  il  peut  être  intéressant  d'étudier  brièvement  la  vision  afin

de  mettre  en  évidence  le  fait  qu'il  faut  vraiment  que  ce  soit  la  pointe  d'un  cône  de  lumière  qui  arrive  à  l'œil  pour  qu'on  voit  tout  ce  qui  se

trouve  délimité  par  cet  espace.  Faire  le  lien  avec  l'homothétie  dans  l'espace  travaillée  en  secondaire  2  (activité  avec  les  ficelles  et  les

deux  figures  semblables).

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 71

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 72

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  |  |  |  |  |
| **Verbal** |  | **X** | **X** |  |  |  |
| **Schéma** |  |  | **X** | **X** | **X** |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **X** | **X** |  |
| **Graphique** |  |  |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  | **X** |  |  |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 8 - LE CERCLE**

**Tableau de traduction**

Le  cercle  est  une  des  premières  figures  géométriques  que  les  enfants  sont

capables  d'identifier. Il  a  de  nombreuses  propriétés  qui  en  font  une  figure

simple  et  complexe  à  la  fois.  Essayons  de  percer  quelques-uns  des  mystères  qui

entourent  cette  forme.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  rayon  du  cercle,  l'angle  au

centre  d'un  cercle  servant  à  déterminer  un  arc,  la  longueur  de  l'arc  de  cercle.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦  Comme  le  cercle  est  une  des  notions  de  géométrie  abordée  en  deuxième

secondaire,  il  peut-être  intéressant  de  combiner  les  objectifs  relatifs  au

cercle  à  ceux  concernant  la  modélisation.

♦  Il  s'agit  de  la  seule  situation  où  nous  considérons  trois  grandeurs

différentes.  Les  élèves  savent  maintenant  comment  analyser  une  situation

si  l'on  tient  compte  de  deux  grandeurs.  Quoi  faire  avec  trois  grandeurs?  Il

suffit  d'en  fixer  une  et  d'observer  ensuite  comment  les  deux  autre  varient.

(On  sensibilise  ici  les  élèves  à  la  notion  de  paramètres  qui  sera  travaillée

en  quatrième  secondaire.)  Dans  ce  cas-ci,  nous  aurons  donc  trois  cas  à

considérer:

1. Angle  au  centre  fixé    rayon  vs  longueur  d'arc

2. Rayon  fixé    angle  au  centre  vs  longueur  d'arc

3. Longueur  d'arc  fixé    rayon  vs  angle  au  centre

♦  La  modélisation  graphique  peut  créer  certains  conflits  chez  les

élèves  puisque  l'angle  au  centre  et  la  longueur  d'arc  ne  sont  pas

vraiment  des  grandeurs  linéaires  et  que  nous  ne  pouvons  que

difficilement  les  transposer  par  report  de  segments.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 73

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes. Nous  pouvons  nous  attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  le  rayon  du  cercle,  le

diamètre  du  cercle,  la  circonférence  du  cercle,  l'aire  du  disque,  la  mesure  de  l'angle  au  centre  qui  sous-tend  un  certain  arc  de  cercle,  la

longueur  d'un  arc  de  cercle,  la  longueur  d'une  corde,  …

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  d'énoncer  une  phrase  qui  mettent  en  évidence  le  lien  entre  les  différentes  grandeurs  qui  nous

intéressent.  Après  avoir  laissé  les  élèves  faire  quelques  tentatives,  l'enseignant  peut  mettre  en  évidence  le  fait  qu'il  est  très  difficile  de

contrôler  trois  grandeurs  en  même  temps  d'autant  plus  qu'elles  dépendent  les  unes  des  autres.  Il  faut  maintenant  chercher  une  solution  au

nouveau  problème  qui  est  apparu. La  solution  est  simple,  mais  il  faut  y  penser  :  comme  nous  sommes  habitués  de  travailler  des

situations  où  nous  considérons  deux  grandeurs,  nous  allons  traiter  les  grandeurs  deux  par  deux.  Nous  allons  fixé  la  troisième  grandeur,

c'est  à  dire  qu'elle  ne  variera  pas.

4.  Maintenant  que  nous  savons  qu'il  y  a  trois  cas  à  considérer,  les  élèves  vont  se  placer  en  équipes  et  chaque  équipe  traitera  un  cas

particulier:

 Angle  au  centre  fixé    Nous  nous  intéressons  au  lien  entre  le  rayon  du  cercle  et  la  longueur  de  l'arc  déterminé  sur  le

cercle.

 Rayon  fixé    Nous  nous  intéressons  au  lien  entre  l'angle  au  centre  du  cercle  et  la  longueur  de  l'arc  qu'il  sous-tend.

 Longueur  d'arc  fixé    Nous  nous  intéressons  au  lien  entre  l'angle  au  centre  du  cercle  qui  déterminer  cet  arc  et  le  rayon  du

cercle.

C'est  lors  du  retour  collectif  à  la  fin  de  l'activité  que  les  élèves  pourront  prendre  conscience  des  autres  cas.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 74

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

5.  Voici  la  liste  des  tâches  qu'auront  à  réaliser  chacune  des  équipes  sur  le  cas  auquel  elles  s'intéressent:

(a)  Décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et

quelle  est  la  grandeur  conséquente.

(b)  Représenter  par  des  schémas,  ou  encore  construire  avec  du  carton  ou  tout  autre  matériel,  un  certain  nombre  de  cas  de  la  situation

qui  les  intéresse.

(c)  Relever  un  certain  nombre  de  données  concernant  les  deux  grandeurs  qui  les  intéressent  directement  sur  leurs  schémas.

-Pour  mesurer  le  rayon,  il  est  possible  d'utiliser  la  règle.

-Pour  mesurer  la  longueur  d'arc,  il  est  possible  d'utiliser  une  corde  et  reporter  la  longueur  sur  une  règle.

-Pour  mesurer  l'angle  au  centre,  il  est  possible  d'utiliser  le  rapporteur  d'angles.  (À  noter  :  il  n'y  a  pas  de  façon  directe  de

transformer  cette  grandeur  pour  qu'elle  devienne  linéaire.)

(d)  Placer  les  données  relevées  à  l'étape  précédente  dans  un  tableau  de  valeurs.

(e)  Tracer  le  graphique  représentant  la  situation  en  reportant  tout  d'abord  nos  données  à  l'aide  de  marches-états.

\*Pour  ce  qui  est  des  mesures  d'angles  au  centre,  il  serait  préférable  de  commencer  par  graduer  notre  axe  et  de  se  servir  des

grandeurs  linéaires  fournies  par  cet  axe  pour  représenter  nos  marches-états  concernant  cette  grandeur.

(f)  Prendre  en  note  toute  observation  intéressante  qui  est  faite  tout  au  long  de  ces  tâches.

(g)  Présenter  les  résultats  sur  une  acétate.

Un  exemple  de  travail  pouvant  être  fait  par  les  élèves  pour  chacun  de  ces  cas  se  trouve  dans  les  pages  qui  suivent.  Parmi  les  deux

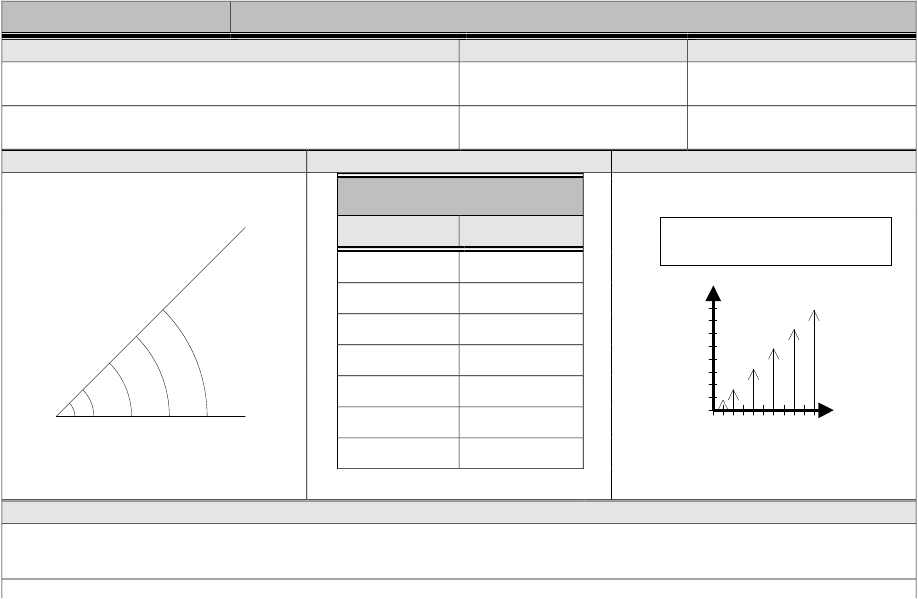
possibilités  d'interprétation  possible,  celle  qui  est  privilégiée  dans  la  suite  du  travail  qui  est  fait  est  identifiée  par  le  symbole  ♥.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 75

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction



**Cas #** 1 **Grandeur fixée :** Angle au centre du cercle

**Exemples   de   phrases   décrivant   la   situation** **Grandeur   prédominante** **Grandeur   conséquente**

«Plus  le  rayon  du  cercle  est  grand,  plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  grande.»

**Version  améliorée:**

♥«Plus  le  rayon  du  cercle  augmente,  plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  élevée.»

«Plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  grande,  plus  le  rayon  du  cercle  est  grand.»

**Version  améliorée:**Rayon  du  cercle                   Longueur  de  l'arc

Longueur  de  l'arc                   Rayon  du  cercle

«Plus  longueur  de  l'arc  de  cercle  augmente,  plus  le  rayon  du  cercle  est  grand.»

**Exemple   de   schéma** **Tableau   de   valeurs** **Graphique**

**La longueur de l'arc de cercle déterminé par un**

\*Nous  savons  que  la  mesure  de  l'angle  au  centre  du

cercle  est  fixée  à  45º  puisqu'il  est  toujurs  déterminé  par

les  deux  mêmes  demi-droites.

**angle au centre de 45º selon la mesure du rayon du**

**cercle**

**Rayon  du  cercle             Longueur  de  l'arc**

**(cm)                                     (cm)**

0             0

0,5            0,4

1             0,8

2             1,6

**Longueur  de  l'arc  de  cercle  déterminé**

**par  un  angle  au  centre  de  45º  selon  la**

**mesure  du  rayon**

longueur  de  l'arc  de  cercle

(cm)

4

3

2

3 2,4

4 3,151

0

0  1  2  3  4  5

rayon  du  cercle

\*\*Ce  schéma  n'est  pas  à  l'échelle  contrairement  à  ceux

que  devront  produire  les  élèves.

5            3,9

**Observations**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 76

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Cas #** 2**Grandeur fixée :** Rayon du cercle | | | | |
| **Exemples   de   phrases   décrivant   la   situation** | | **Grandeur   prédominante** | | **Grandeur   conséquente** |
| «Plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  grand,  plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  grande.»  **Version  améliorée:**  ♥«Plus  l'angle  au  centre  du  cercle  augmente,  plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  élevée.» | | Angle  au  centre  du  cercle | | Longueur  de  l'arc |
| «Plus  la  longueur  de  l'arc  de  cercle  est  grande,  plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  grand.»  **Version  améliorée:**  «Plus  longueur  de  l'arc  de  cercle  augmente,  plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  grand.» | | Longueur  de  l'arc | | Angle  au  centre  du  cercle |
| **Exemple   de   schéma** | **Tableau   de   valeurs** | | **Graphique** | |
| **rayon**  \*\*Ce  schéma  n'est  pas  à  l'échelle  contrairement  à  ceux  que  devront  produire  les  élèves. |  | | **Longueur  de  l'arc  de  cercle  (de  rayon  de  3cm)**  **selon  l'angle  au  centre  du  cercle**  Longueur de l'arc de  cercle (cm)  5  4  3  2  1                                                           Angle au centre  0                                                                 du cercle  0       20      40     60      80     100         (degrés) | |
| **Observations** | | | | |
|  | | | | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Longueur  de  l'arc  selon  la  mesure  de  l'angle  au**  **centre  d'un  cercle  de  rayon  3cm** | |
| Angle  au  centre  (degrés) | Longueur  d'arc  (cm) |
| 0 | 0 |
| 10 | 0.52 |
| 20 | 1.05 |
| 30 | 1.57 |
| 40 | 2.09 |
| 50 | 2.62 |
| 60 | 3.14 |
| 70 | 3.67 |
| 80 | 4.19 |
| 90 | 4.71 |
| 100 | 5.24 |
| 110 | 5.76 |

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 77

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Cas #** 3 | **Grandeur fixée :** Longueur de l'arc de cercle | | | | |
|  |  | |  | |  |
| **Exemples   de   phrases   décrivant   la   situation** | | | **Grandeur   prédominante** | | **Grandeur   conséquente** |
| «Plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  grand,  plus  le  rayon  du  cercle  est  petit.»  **Version  améliorée:**  «Plus  l'angle  au  centre  du  cercle  augmente,  plus  plus  le  rayon  du  cercle  est  petit.» | | | Angle  au  centre  du  cercle | | Rayon  du  cercle |
| «Plus  le  rayon  du  cercle  est  grand,  plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  petit.»  **Version  améliorée:**  ♥«Plus  le  rayon  du  cercle  augmente,  plus  l'angle  au  centre  du  cercle  est  petit.» | | | Rayon  du  cercle | | Angle  au  centre  du  cercle |
| **Exemples   de   schémas** | | **Tableau   de   valeurs** | | **Graphique** | |
| \*La  longueur  de  l'arc  a  été  fixée  à  2,45  cm.  \*\*Ce  schéma  n'est  pas  à  l'échelle  contrairement  à  ceux  que  devront  produire  les  élèves. | | **Angle  au  centre  du  cercle  selon  la  mesure  du**  **rayon**  Rayon du cercle (cm)           Angle au centre du cercle  (degrés)  2                                              70  3.5                                             40  5                                              28  6.5                                           21.5  8                                             17.5 | | **L'angle  au  centre  d'un  cercle  qui  sous-tend  un  arc**  **de  2.45  cm  selon  la  mesure  du  rayon  du  cercle**  angle au centre  (degrés)  70  60  50  40  30  20  10  0                                                      rayon du  0     1 2     3     4     5     6 7     8         cercle(cm) | |
| **Observations** | | | | | |
|  | | | | | |

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 78

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

6.  L'enseignant  demande  à  des  élèves  de  venir  à  l'avant  de  la  classe  afin  de  présenter  le  travail  fait  par  leur  équipe.

7.  Dans  les  deux  premiers  cas,  nous  sommes  en  présence  de  situations  qui  sont  proportionnelles.  L'enseignant  peut  demander  aux  élèves  de

montrer  que  les  situations  sont  réellement  proportionnelles  en  travaillant  dans  le  tableau  de  valeurs  et  en  illustrant  les  écarts  (ou  encore  le

lien  interne).

8.  L'enseignant  peut  également  demander  aux  élèves  de  trouver  la  règle  de  ces  situations  proportionnelles.

Exemple  :  longueur  d'arc  de  cercle  =  constante  \*  rayon  du  cercle

9.  Pour  ce  qui  est  du  troisième  cas,  la  situation  est  inversement  proportionnelle. L'enseignant  peut  le  faire  constater  aux  élèves  en

travaillant  dans  le  tableau  de  valeurs  en  utilisant  le  lien  multiplicatif,  Ainsi,  si  pour  passer  d'un  ligne  à  l'autre  dans  la  colonne  du  rayon

du  cercle,  on  multiplie  par  une  certaine  valeur,  on  constate  que  pour  passer  d'une  ligne  à  l'autre  dans  la  colonne  de  l'angle  au  centre,  on

divise  par  cette  même  valeur.

10.  Il  est  également  possible  d'essayer  de  déterminer  la  formule  correspondant  à  cette  situation:

angle  au  centre  du  cercle  =  constante  \*  (1  /  rayon  du  cercle)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 79

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Déduire  la  formule  de  l'aire  du  cercle  en  considérant  les  grandeurs  suivantes  :  aire  du  cercle,  carré  du  rayon  du  cercle.  Pour  se  faire,  il

suffit  d'élever  un  carré  sur  un  rayon  du  cercle  puis  de  subdiviser  ce  carré  en  carrés  de  plus  en  plus  petit  (exemple  :  subdiviser  chaque  côté

en  10  parties).  Compter  le  nombre  de  petits  carrés  couvrant  la  surface  totale  du  cercle  et  comparer  avec  le  nombre  de  petits  carrés  dans

le  grand  carré  élevé  sur  le  rayon  du  cercle.  Plus  les  carrés  sont  petits,  plus  cette  valeur  devrait  se  rapprocher  de  3,14  soit  .

  En  cinquième  secondaire,  cette  situation  peut  servir  à  mettre  en  évidence  le  fait  que  dans  chaque  situation  où  il  y  a  proportionnalité  se

cache  souvent  une  autre  situation  qui  est  inversement  proportionnelle.

  Travailler  avec  d'autres  grandeurs  qui  se  retrouvent  dans  le  cercle  :  circonférence  du  cercle,  diamètre,  aire  du  disque,  longueur  d'une

corde,…

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 80

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  | **X** |  |  |  |  |
| **Verbal** |  | **X** |  |  | **X** | **X** |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  | **X** | **X** |
| **Formel** |  | **X** |  |  | **X** | **X** |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 9 - LA FACTURE D'ÉLECTRICITÉ**

**Tableau de traduction**

Lorsque  nous  observons  la  facture  d'électricité  d'un  certain  mois,  nous  pouvons

remarquer  que  la  façon  de  calculer  les  coûts  est  un  peu  particulière.  Voici  une

de  ces  façons:

 *Chacun  des  100  premiers  kWh  coûte  0,04$.*

 *Les  150  kWh  suivants  coûtent  0,02$  chacun.*

 *Les  kWh  excédentaires  coûtent  chacun  0,01$.*

*\*Un  montant  fixe  de  1,50$  sera  exigé  de  tout  consommateur  pour  chaque*

*période  de  30  jours.*

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  coût,  la  consommation

électrique.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Il  s'agit  d'une  situation  où  le  domaine(consommation  électrique)  n'a  pas  de

borne  supérieure,  il  peut  y  avoir  des  valeurs  infinies.

♦ C'est  une  situation  où  il  y  a  de  nombreuses  phases,  alors  il  faudra  en  tenir

compte  pour  la  modélisation  formelle

♦ Les  données  du  problème  renseignent  sur  les  marches  d'accroissement  à

considérer  pour  produire  le  graphique.

♦ En  Sciences  physiques  436,  les  étudiants  doivent  développer  leur  capacité  à

calculer  une  facture  électrique.  Pourquoi  ne  pas  faire  de  cette  situation  une

activité  pluridisciplinaires?

\*Il  serait  évidemment  possible  de  travailler  dans  le  tableau  de  valeurs,  mais

notre  façon  d'aborder  la  situation  ne  s'y  prête  pas  vraiment.  C'est  pourquoi  nous

avons  choisi  de  l'ignorer  dans  le  tableau  ci-dessus.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 81

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de quatrième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants  sans  donner  d'indication  sur  la  façon  de  varier  des  deux  grandeurs.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Les  élèves  risquent  d'être  limités  aux  deux

grandeurs  proposées  dans  l'énoncé  du  problème,  mais  nous  devons  accepter  toutes  les  grandeurs  qui  ont  un  lien  avec  la  facture

d'électricité.

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle

est  la  grandeur  prédominante  (variable  indépendante)  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente  (variable  dépendante).  Dans  ce  cas-ci,  nous

voyons  clairement  que  le  montant  dépend  de  la  consommation  électrique  :  nous  consommons  durant  tout  le  mois  et  la  facture  arrive  par

après.  Nous  pouvons  donc  nous  attendre  à  ce  qu'une  phrase  ressemblant  à  celle-ci  soit  prononcée  par  les  élèves:

<<Plus  je  prends  d'électricité,  plus  ça  coûte  cher!>>

L'enseignant  peut  reformuler  cette  phrase  afin  d'amener  graduellement  les  élèves  à  employer  un  vocabulaire  plus  précis:

<<Plus  la  consommation  électrique  augmente,  plus  le  montant  de  la  facture  d'électricité  sera  élevé.>>

4.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  voir  pour  quelles  valeurs  elles  sont  définies.  Nous  nous

questionnons  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation.  Pour  ce  qui  est  de  la  consommation  électrique,  elle  peut  prendre

toutes  les  valeurs  qui  sont  dans  les  réels  positifs  et  même  aller  jusqu'à  l'infini.  Le  montant  de  la  facture  d'électricité,  pour  sa  part,varie

entre  1,50$  (coût  de  base)  et  l'infini.

5.  Nous  pouvons  également  nous  questionner  pour  savoir  si  la  situation  que  nous  traitons  est  une  fonction  ou  une  relation.  En  questionnant

les  élèves,  nous  devrions  pouvoir  arriver  à  la  conclusion  que  cette  situation  est  une  fonction  puisque  pour  n'importe  quelle  valeur  de

consommation  électrique,  il  y  a  une  et  une  seule  valeur  du  montant  qui  lui  soit  associée.

6.  Demander  aux  élèves  de  faire  une  première  ébauche  du  graphique  qui  représenterait  cette  situation.  La  consommation  électrique  est

mise  en  abscisse  et  le  montant  de  la  facture  est  mis  en  ordonnée.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 82

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

7.  L'énoncé  du  problème  nous  permet  de  détecter  un  certain  nombre  de  points  repères  dans  cette  situation:

 Pour  une  consommation  électrique  nulle,  le  montant  est  de  1,50$.  (C'est  notre  ordonnée  à  l'origine.)

 Lorsque  nous  atteignons  une  consommation  électrique  de  100  kWh,  il  nous  en  coûte  5,50$.

 Lorsque  nous  atteignons  une  consommation  électrique  de  250  kWg,  il  nous  en  coûte  5,50$  +  3,00$

Il  est  possible  de  placer  ces  différents  points-repères  dans  notre  graphique  à  l'aide  de  marches-états.

8.  Ces  points-repères  délimitent  un  certain  nombre  de  phases  dans  notre  situation.  Nous  pouvons  maintenant  nous  interroger  sur  la  façon

dont  varient  nos  grandeurs  à  l'intérieur  de  chacune  de  ces  phases.  Si  nous  considérons  les  données  du  problème,  nous  savons  que  sur

l'intervalle  des  100  premiers  kWh,  si  nous  augmentons  la  consommation  électrique  de  1kWh,  le  montant  augmente  de  0,04$.  Nous

pouvons  représenter  ces  accroissements  constants  par  des  marches  d'accroissement  dans  le  graphique,  ce  qui  nous  amène  à  obtenir  un

segment  de  droite.  Nous  pouvons  relier  les  points  obtenus  puisque  nous  savons  que  si  nous  considérons  des  accroissements  plus  petits  de

la  consommation  électrique,  nous  obtiendrons  quand  même  un  montant  qui  lui  est  associé.  Pour  l'enseignant,  il  peut  être  difficile  de

représenter  de  petits  accroissements,  alors  il  est  possible  de  considérer  des  accroissements  de  25  kWh  dans  la  direction  de  l'axe  des

abscisses  qui  sont  associés  à  des  accroissements  de  1,00$  en  direction  de  l'axe  des  ordonnées.

9.  Il  est  possible  d'utiliser  des  raisonnements  semblables  pour  tracer  les  deuxième  et  troisième  parties  de  la  courbe.

\*Remarque  aux  enseignants  : Une  bonne  idée  serait  de  tracer  chacune  des  parties  décrites  précédemment  sur  une  acétate  différente.  Ainsi,

l'enseignant  peut  manipuler  chacun  des  tronçons  de  courbe  pour  comparer  leurs  pentes  entre  elles. On  retrouve  les  trois  graphiques

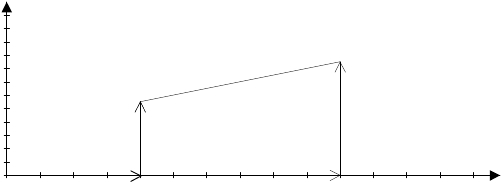
correspondant  sur  la  prochaine  page.  En  superposant  ces  graphiques,  nous  obtenons  la  courbe  complète.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 83

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Montant  d'une  facture  d'électricité  selon  la  consommation  électrique**

Montant  ($)

12

10

8

6

4

2

Consommation  électrique  (kWh)

Montant  ($)

0        50       100      150      200      250             350

12

10

8

6

4

2

300

**Montant  d'une  facture  d'électricité  selon  la  consommation  électrique**

Consommation  électrique  (kWh)

300

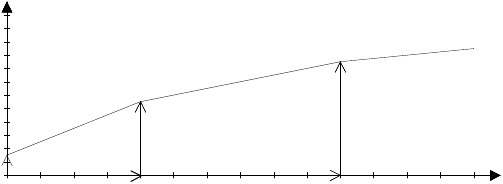
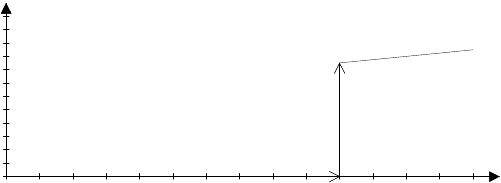
0        50       100      150      200      250             350

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 84

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Montant  d'une  facture  d'électricité  selon  la  consommation  électrique**

Montant  ($)

12

10

8

6

4

2

Consommation  électrique  (kWh)

300

0        50       100      150      200      250             350

Graphique  complet

**Montant  d'une  facture  d'électricité  selon  la  consommation  électrique**

Montant  ($)

12

10

8

6

4

2

Consommation  électrique  (kWh)

300

0        50       100      150      200      250             350

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 85

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

10.  Si  nous  nous  intéressons  maintenant  à  la  modélisation  formelle  de  la  situation,  nous  pouvons  nous  attendre  à  quelque  chose  de  très

simple  même  s'il  s'agit  d'une  fonction  par  partie:

 Lorsque  la  consommation  électrique  est  inférieure  à  100kWh:

montant  à  payer  =  1,50$  +  0,04$/kWh  \*  nombre  de  kWh

m=f(  c  )=0,04c+1,50

 Lorsque  la  consommation  électrique  se  situe  entre  100kWh  et  250kWh:

montant  à  payer  =  1,50$  +  (100kWh\*0,04$/kWh)  +0,02$/kWh\*(nombre  de  kWh  -100kWh)

montant  à  payer  =  5,50$  +0,02$/kWh\*(nombre  de  kWh  -100kWh)

m=f(  c  )=  5,50+0,02c

 Lorsque  la  consommation  électrique  est  supérieure  à  250  kWh:

montant  à  payer  =  5,50$  +(150kWh\*0,02$)  +  0,01$/kWh\*(nombre  de  kWh  -250  kWh)

montant  à  payer  =  8,50$  +  0,01$/kWh\*(nombre  de  kWh  -250  kWh)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 86

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Comparer  les  données  de  ce  problème  à  une  véritable  facture  d'électricité.

  Si  nous  produisons  un  second  graphique  illustrant  la  consommation  électrique  en  fonction  du  temps,  il  est  possible  de  faire  une

composée  de  fonction  pour  avoir  le  montant  en  fonction  du  temps.  (voir  annexe  A)

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 87

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 88

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Verbal** |  | **X** | **X** |  | **X** |  |
| **Schéma** |  | **X** | **X** | **X** | **X** |  |
| **Table de**  **valeurs** |  | **X** | **X** | **X** |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  | **X** |  |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**SITUATION 10 - PROMENADE EN MONTAGNE**

**Énoncé du problème**

**Tableau de traduction**

Un  promeneur  marche  et  grimpe  une  montagne  jusqu'à  son  sommet.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes:l'altitude  du  promeneur,  la

distance  parcourue  par  le  promeneur.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Il  s'agit  d'une  situation  qui  met  en  évidence  le  conflit  objet-source/objet-

cible  puisque  l'allure  de  la  courbe  de  notre  modélisation  graphique  (objet-

cible)  est  semblable  à  l'allure  d'une  véritable  montagne  (objet-source).

♦ Cette  situation  est  très  intéressante  puisque  chaque  promenade  en

montagne  a  sa  propre  modélisation  et  qu'il  est  donc  possible  de  considérer

différents  scénarios  pour  relater  la  promenade  en  montagne.  De  ce  fait,  le

titre  que  nous  attribuons  au  graphique  où  à  la  table  de  valeurs  doit  nous

renseigner  sur  la  promenade  précise  que  nous  considérons.

♦ Le  temps  est  omniprésent  dans  la  situation,  mais  il  ne  constitue  pas  une  des

variables  que  nous  allons  considérer.  Par  conséquent,  il  faudra  s'assurer

qu'il  n'intervienne  pas  dans  la  description  verbale  de  la  promenade  en

montagne.

♦ En  montagne,  la  forme  du  terrain  varie  considérablement.  Par  conséquent,

il  est  très  difficile  d'illustrer  précisément  la  situation. Il  faudra  donc

accepter  de  faire  une  représentation  générale  qui  illustre  globalement  la

description  qui  est  faite  tout  en  ayant  à  l'esprit  qu'à  l'intérieur  d'une  même

phase,  il  peut  aussi  y  avoir  des  variations  très  petites  qui  ne  sont  pas

représentées  sur  le  graphique.

♦ Il  est  possible  de  représenter  la  montagne  par  une  maquette  (expérience)  ou

encore  par  un  schéma.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 89

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de quatrième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes.  On  peut  ici  s'attendre  à  des  grandeurs  diverses  dont  :  le  temps,  la  distance  parcourue,

l'altitude,  la  vitesse,  l'aspect  du  terrain,  …

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle

est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente.  Ainsi,  on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes:

A-«Plus  j'ai  marché,  plus  je  suis  haut.»  [Grandeur  prédominante  :  distance  parcourue]

B-«Plus  je  suis  haut,  plus  j'ai  marché.»  [Grandeur  prédominante  :  altitude]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  distance  parcourue  augmente,  plus  l'altitude  à  laquelle  se  trouve  le  promeneur  est  élevée.»

[Grandeur  prédominante  :  distance  parcourue]

B-«Plus  l'altitude  augmente,  plus  la  distance  que  j'ai  parcourue  est  élevée.»  [Grandeur  prédominante  :  altitude]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  qui  a  été  dite  bien  qu'il  puisse  être  très  profitable  de  travailler  B

plutôt  que  A  puisque  nous  aurons  une  relation  plutôt  qu'une  fonction.

4.  À  ce  stade-ci,  il  devient  important  de  s'interroger  sur  les  variables  choisies  afin  de  voir  pour  quelles  valeurs  elles  sont  définies.  (Nous

nous  questionnons  donc  sur  le  domaine  et  le  codomaine  de  la  situation  sans  le  mentionner  explicitement.)  Pour  ce  qui  est  de  la  distance

parcourue,  elle  sera  définie  dans  les  réels  positifs,  c'est-à-dire  de  0  jusqu'à  ce  que  le  promeneur  soit  rendu  au  sommet  de  la  montagne.

Dans  ce  cas-ci,  nous  supposerons  que  cette  distance  est  de  1,5km.  L'altitude,  quant  à  elle,  va  varier  du  niveau  de  la  mer  (0  m)  jusqu'à

l'altitude  correspondant  au  somment  de  la  montagne  que  nous  nommerons  ici  l'  "altitude  maximale".

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 90

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**L'altitude  du  promeneur  selon  la  distance  parcourue**

**altitude**

**(m)**

altitude

maximale

0

**distance**

**parcourue**

0

1500

**(m)**

5.  Mentionner  quelques  éléments  (points-repères)  qui  se  retrouvent  sur  la  montagne.  Par  exemple,  il  y  a  un  lac  à  250  mètres  d'altitude.  Il  y

a  un  chalet  à  550  mètres  d'altitude.  Il  y  a  un  observatoire  au  sommet  de  la  montagne  (altitude  :  1000m).  Demander  aux  élèves  de  faire

une  première  ébauche  du  graphique  qui  représenterait  cette  situation.

**altitude**

6.  Nous  pouvons  nous  attendre  à  ce  que  les  élèves  produisent  une  modélisation

graphique  s'apparentant  à  celle  illustré  ci-contre.  Cela  est  dû  au  conflit  qui

exite  entre  l'objet-source,  c'est-à-dire  la  représentation  mentale  qu'ont  les

élèves  de  la  montagne  dont  il  est  question,  et  l'objet-cible  qui  est  ici  la

représentation  graphique  qu'ils  tentent  de  produire  à  partir  de  la  situation.

**distance**

**parcourue**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 91

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

7.  Afin  de  contrer  cette  mauvaise  habitude  qu'ont  les  élèves  à  tenter  de**altitude**

reproduire  une  image  dans  leur  représentation  graphique,  il  faut

amener  les  élèves  à  s'interroger  sur  la  signification  de  la  modélisation

qu'ils  ont  produite.  Voici  quelques  exemples  de  questions  qui  feront

réfléchir  les  élèves  sur  le  graphique  qu'ils  ont  produit:

♦*À  chaque  pas  qu'il  fait,  le  promeneur  monte  en  altitude,  n'y  a-*

*t-il  pas  certains  endroits  sur  le  sentier  où  il  doit  descendre*

*une  petite  pente  avant  d'en  grimper  une  autre?*

♦*Si  on  examine  la  variation  sur  le  graphique,  on  constate  que*

*pour  une  même  distance  parcourue  au  début  ou  à  la  fin  du*

*trajet,  la  variation  d'altitude  est  la  même.* *Est-ce  que*

*l'inclinaison  du  terrain  est  toujours  la  même?  Est-ce  vraiment*

*comme  ça  que  vous  imaginiez  la  montagne?* *[Il  est  aussi*

*possible  de  demander  aux  élèves  de  représenter  visuellement*

*la  montagne  qu'ils  ont  imaginé  et  de  leur  demander  de  nous*

*décrire  a  promenade  qu'ils  ont  voulu  représenter.]*

**distance**

**parcourue**

8.  Après  cette  réflexion,  les  élèves  devraient  être  d'accord  pour  dire  que  le  graphique  représentant  une  promenade  en  montagne  n'est  pas

nécessairement  constitué  d'une  courbe  régulière  et  que  toute  promenade  en  montagne  n'a  pas  nécessairement  la  même  modélisation

graphique.  Suite  à  ces  constatations,  il  convient  de  s'entendre  sur  une  même  description  de  la  promenade  en  montagne  afin  que  tous  les

élèves  produisent  un  graphique  semblable.  Nous  allons  donc  décrire  la  promenade  qu'a  fait  Rémi  en  la  décortiquant  selon  différentes

phases.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 92

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Phase  1

Phase  2

Phase  3

Phase  4

Phase  5

Phase  6

*La  promenade  en  montagne  de  Rémi*

Durant  les  300  premiers  mètres  de  sa  promenade,  Rémi  marche  sur  un  sentier  dont  la  pente  est  régulière.  Ainsi,  pour  chaque  pas

qu'il  fait,  il  s'élève  en  altitude  de  façon  constante.  Au  bout  des  trois  cent  mètres,  il  est  rendu  à  une  alitude  de  250m.

Durant  les  200  mètre  suivant,  Rémi  fait  le  tour  d'un  lac  afin  de  se  rendre  au  prochaine  sentier  qui  lui  permettra  de  poursuivre  son

ascension.  Rémi  reste  donc  au  même  niveau,  son  altitude  ne  varie  pas.

Cette  phase  est  deux  fois  moins  longue  que  la  précédente.  Rémi  doit  descendre  une  côté  dont  la  pente  n'est  pas  régulière.  La  pente

est  assez  douce  au  début  de  la  côté  puis  elle  devient  plus  à  pic  vers  la  fin  de  la  côte.  Son  altitude  a  diminué  de  100  mètres.

Cette  phase  est  analogue  à  la  phase  1  :  durant  les  400  mètres  qui  suivent,  Rémi  se  trouve  encore  sur  un  sentier  dont  la  pente  est

régulière  et  qui  mène  à  un  chalet  où  il  peut  finalement  aller  aux  toilettes.  En  tout,  il  s'élève  de  400  mètres  en  altitude.

Dans  cette  phase,  Rémi  va  parcourir  une  distance  supérieure  de  50  mètres  à  la  distance  qu'il  a  parcouru  lors  de  la  phase  précédente.

Au  départ,  la  pente  est  très  faible,  presque  nulle,  ce  qui  fait  que  Rémi  ne  s'élève  presque  pas  en  altitude.  Vers  la  fin  de  la  phase  par

contre,  la  pente  est  beaucoup  plus  à  pic  et  Rémi  doit  user  des  techniques  d'escalade  qu'il  a  apprises  à  l'école.  En  effet,  pour  une

même  distance  parcourue,  il  s'élève  énormément  en  altitude.

Rémi  est  rendu  au  sommet  de  la  montagne  et  marche  un  peu  sur  l'observatoire  afin  d'observer  le  paysage.     Ainsi,  durant  les

cinquante  derniers  mètres,  Rémi  se  trouve  à  l'altitude  maximale  de  1000  mètres.

\*  Fait  intéressant  à  remarquer  :  Dans  la  description  verbale  ci-dessus,  on  utilise  parfois  le  mot  "pente"  en  parlant  de  la  montagne.  Est-ce  que

cela  ne  risque  pas  d'occasionner  encore  une  fois  un  conflit  objet-source/objet-cible  étant  donné  que,  graphiquement  parlant,  nous  utilisons  le

terme  "pente"  lorsque  nous  traitons  du  modèle  linéaire?

9.  Avant  de  débuter  la  modélisation  graphique  en  tant  que  tel,  il  convient  de  s'interroger  sur  la  façon  de  graduer  nos  axes  afin  de  bien

représenter  la  situation.  Pour  ce  qui  est  de  l'axe  de  la  distance  parcourue,  on  remarque  que  les  distances  décrites  sont  des  multiples  de  50

mètres  ou  encore  de  100  mètres.  Il  est  donc  possible  de  mettre  une  graduation  de  100  mètres  que  nous  pourrons  diviser  en  deux  au

besoin  pour  obtenir  des  graduations  intermédiaires  de  50  mètres.  Pour  ce  qui  est  de  l'altitude,  un  même  raisonnement  peut  nous  amener  à

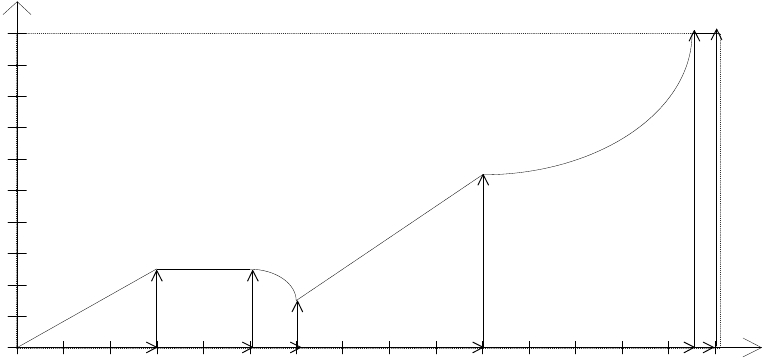
privilégier  des  graduations  de  100  mètres.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 93

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

10.  Le  temps  est  maintenant  venu  de  se  mettre  à  la  production  de  notre  modélisation  graphique.  Il  est  tout  d'abord  possible  de  déterminer

certains  points-repères  à  partir  de  la  description  verbale  de  la  situation  qui  serviront  à  délimiter  nos  différentes  phases.  Ces  points-

repères  seront  placés  sur  notre  graphique  à  l'aide  des  marches-états.  Nous  placerons  la  marche  représentant  la  distance  et  la  contre-

marche  représentant  l'altitude.  Par  la  suite,  en  analysant  la  variation  nous  allons  tracer  la  courbe  dans  la  mesure  où  nous  sommes  certains

que  la  caractéristiques  de  variation  est  préservée  sur  toute  la  phase.

**L'altitude  de  Rémi  selon  la  distance  qu'il  a  parcouru  sur  le  Mont  Royal**

**altitude  (m)**

1000

900

800

700

P-6

P-5

600

500

400

P-4

300

P-2      P-3

200

100P1

**distance**

**parcourue  (m)**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 94

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Voici  le  graphique  correspondant  à  la  description  que  nous  avons  faite  de  la  situation:

**L'altitude  de  Rémi  selon  la  distance  qu'il  a  parcouru  sur  le  Mont  Royal**

**altitude  (m)**

1000

900

800

700

600

500

400

300

200

100

0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100  1200 1300  1400 1500

**distance**

**parcourue  (m)**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 95

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  En  faisant  un  second  graphique,  il  est  possible  de  travailler  la  composition  de  fonctions  en  cinquième  secondaire.  En  effet,  si  le  premier

graphique  représente  l'altitude  en  fonction  de  la  distance  parcourue  et  le  second  représente  la  distance  parcourue  en  fonction  du  temps,  il

est  possible  de  tracer  le  graphique  de  l'altitude  en  fonction  du  temps  à  partir  des  deux  précédents.  (Voir  annexe  A)

  Il  est  possible  de  rajouter  des  éléments  dans  la  description  de  l'ascension  de  la  montagne  de  telle  sorte  que  l'allure  de  la  modélisation

graphique  soit  modifiée.  Par  exemple,  s'il  y  a  un  téléphérique,  il  y  a  de  fortes  chances  pour  que  les  variations  des  grandeurs  soient  plus

constantes  que  si  on  se  promène  à  pieds.

  Il  est  aussi  possible  de  considérer  le  temps  et  l'altitude  comme  grandeurs  et  d'imposer  que  ce  soit  l'altitude  qui  soit  la  grandeur

prédominante.  Ainsi,  les  élèves  sont  forcés  de  considérer  la  situation  d'une  façon  autre  que  chronique.  De  plus,  nous  n'aurions  pas  une

fonction  mais  bien  une  relation.  Il  est  important  de  voir  aussi  des  relations  avant  que  les  élèves  n'arrivent  en  secondaire  4.

  Si  les  élèves  font  une  verbalisation  semblable  à  celle-ci  :«Plus  j'ai  marché,  plus  je  suis  proche  du  sommet.»,  il  peut-être  intéressant  de

travailler  la  situation  d'un  autre  point  de  vue. En  effet,  plutôt  que  de  considérer  l'altitude  du  promeneur,  on  considère  la  grandeur

complémentaire,  à  savoir  la  hauteur  qui  sépare  le  promeneur  du  sommet  de  la  montagne.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 96

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  |  |  |  |  |
| **Verbal** |  | **X** | **X** | **X** | **X** | **X** |
| **Schéma** |  |  | **X** | **X** | **X** | **X** |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **X** | **X** | **X** |
| **Graphique** |  |  |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  |  |

**SITUATION 11 - LA TEMPÉRATURE ET L'ALTITUDE**

**Énoncé du problème**

Les  personnes  qui  font  de  la  randonnée  en  montagne  savent  qu'ils  doivent

prévoir  différents  types  de  vêtements  puisque  la  température  n'est  pas  la  même

au  sommet  de  la  montagne  qu'au  niveau  de  la  mer.

Il  est  prouvé  qu'à  chaque  fois  qu'on  s'élève  de  520  mètres,  la  température

s'abaisse  de  5  degrés  Celsius.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  l'altitude  du  grimpeur,  la

température.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Les  élèves  créent  un  schéma  qui  ressemble  drôlement  à  un  tableau  de

valeurs.

♦ Il  s'agit  d'une  situation  appartenant  au  modèle  linéaire  et  qui  permet  de

travailler  avec  des  valeurs  négatives.

♦ La  modélisation  formelle  est  facile,  même  pour  des  élèves  de  secondaire  2.

**Tableau de traduction**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 97

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |
| --- | --- |
| **Altitude(m)** | **Température(ºC)** |
| 0 | 18 |
| 520 | 13 |
| 1040 | 8 |
| 1560 | 3 |
| 2080 | -2 |
| 2600 | -7 |

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

12.  L'enseignant  présente  la  situation  aux  élèves.

13.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la  situation. Les  phrases  prononcées  serviront  à  mettre  en

évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante,  celle  sur  laquelle  nous  nous  appuyons,  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente,  c'est-à-dire

comment  l'élève  se  positionne  pour  expliquer  la  façon  dont  réagit  une  grandeur  lorsque  nous  faisons  bouger  l'autre..  Ainsi,  on  peut

s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  je  suis  haut,  plus  il  fait  froid.»  [Grandeur  prédominante  :  altitude]

B-«Plus  il  fait  froid,  plus  je  suis  haut.»  [Grandeur  prédominante  :  température]

Dans  ce  cas-ci,  l'énoncé  du  problème  nous  suggère  la  grandeur  prédominante.  En  effet,  lorsqu'il  est  dit  "chaque  fois  qu'on  s'élève  de

520  mètres  en  altitude,  la  température  baisse  de  5  degrés",  nous  voyons  clairement  que  l'altitude  du  promeneur  vient  d'abord  et  que  la

température  est  la  grandeur  conséquente.  L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  A  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer

les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié  qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  l'altitude  du  promeneur  augmente  ,  plus  la  température  est  basse.»

14.  L'enseignant  demande  ensuite  de  représenter  cette  situation  par  un  schéma.  Nous  pouvons  nous  attendre  à  ce  que  les  schéma  faits  par  les

élèves  nous  donnent  une  certaine  liste  de  données.  En  effet,  tout  comme  le  tableau  de  valeurs,  le  schéma  associe  une  certaine  valeur

d'altitude  à  une  certaine  valeur  de  température.  Examinons  ces  deux  modes  de  représentation  de  plus  près:

+520

+520

+520

+520

**2600m**

**2080m**

**1560m**

**1040m**

**520m**

**-7ºC**

**-2ºC**

**3ºC**

**8ºC**

**13ºC**

-5

-5

-5

-5

-5

+520

**0m**

**Schéma**

**18ºC**

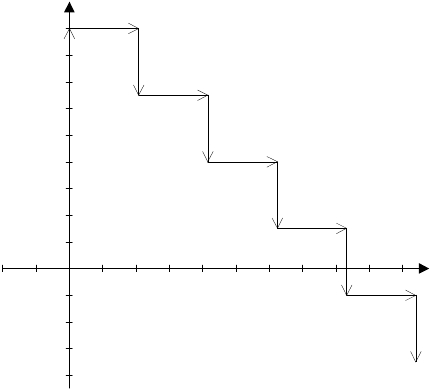
Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 98

**Tableau  de  valeurs**

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

15.  Représentons  également  la  situation  dans  un  graphique.  Nous  allons  tout  d'abord  placer  la  valeur  initiale  en  supposant  qu'au  niveau  de  la

mer,  la  température  est  de  18ºC.  Nous  allons  ensuite  placer  un  certain  nombre  d'autres  points  en  utilisant  les  marches  d'accroissement

puisque  nous  savons  précisément  de  quelle  façon  se  comporte  la  situation  du  point  de  vue  des  écarts  de  chaque  grandeur.  Ainsi,  d'un

point  à  l'autre,  il  y  a  un  accroissement  de  520  mètres  en  direction  de  l'axe  des  abscisses  (altitude)  et  il  y  a  un  accroissement  de  -5ºC  dans

le  sens  de  l'axe  des  ordonnées  (température).

16.  Cherchons  maintenant  la  formule  qui  permette  de

calculer  la  température  en  fonction  de  l'altitude.  On

**La  température  selon  l'altitude**

sait  qu'au  départ  la  température  est  de  18ºC.  À  cette

valeur,  nous  devons  retrancher  5ºC  autant  de  fois

qu'il  y  a  de  520  mètres  d'altitude.

Ainsi  :  Température  =  18  -  5  \*  (altitude/520m)

**Température  (ºC)**

18

16

14

12

10

8

6

4

2

-500

0

0

-2

500               1500     2000    2500

1000

**Altitude  (m)**

-4

-6

-8

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 99

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Lire  un  article  de  revue  ou  regarder  un  documentaire  sur  un  alpiniste  qui  a  escaladé  une  montagne  très  haute  afin  de  pouvoir  bien  voir  les

différences  de  conditions  climatiques  à  différentes  altitudes  et  les  vêtements  nécessaires  à  une  telle  expédition.

  Se  questionner  sur  ce  qui  se  passe  si  nous  allons  dans  des  grottes  souterraines  :  la  température  suit-elle  la  même  règle?

  Nous  pouvons  encore  faire  une  composée  de  fonction  (voir  annexe  A).  Nous  avons  le  graphique  de  la  température  selon  l'altitude.  Si

nous  traçons  un  second  graphique  illustrant  l'altitude  en  fonction  de  la  distance  parcourue  par  l'alpiniste,  nous  pouvons  faire  une

composée  de  telle  sorte  à  avoir  un  graphique  de  la  température  selon  la  distance  parcourue  par  l'alpiniste.

  Il  est  possible  de  faire  des  liens  avec  les  cours  de  géographie  et  d'écologie  en  comparant  l'évolution  de  la  faune  et  de  la  flore  au  fur  et  à

mesure  qu'on  s'élève  en  altitude  et  les  conditions  climatiques  environnantes.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 100

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  | **2** | **2-3** | **2-3** |  |
| **Verbal** | **2-3** | **2-3-4** | **2-3-4** |  | **2-3** |  |
| **Schéma** |  |  | **2** | **3\*\*** | **2-3** | **4** |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  | **3** | **3** |  |
| **Graphique** |  |  |  |  | **3** |  |
| **Formel** |  |  |  |  |  | **4** |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 12 - LE DRAPEAU DU SCOUT**

**(Comment   utiliser   une   même   situation   à   différents   niveaux?)**

**Tableau de traduction**

Un  scout  est  responsable  de  hisser  un  drapeau  sur  un  mât.  Pour  faire  cela,  il

attache  une  extrémité  de  la  corde  qui  est  reliée  au  drapeau  à  sa  ceinture.

Lorsqu'il  est  à  côté  du  mât,  le  drapeau  est  au  sol  et  la  corde  est  tendue.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  distance  horizontale  entre  le

scout  et  le  pied  du  mât,  la  hauteur  du  drapeau.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Cette  situation  permet  de  mettre  en  évidence  la  tendance  des  élèves  à

linéariser,  c'est-à-dire  à  représenter  une  situation  par  un  ou  plusieurs

segments  de  droite.

♦ Il  est  possible  de  simuler  la  situation,  en  classe  ou  à  la  maison,  avec  un

drapeau  et  un  mât  créé  par  nos  propres  moyens.  La  manipulation  peut

servir  à  convaincre  les  élèves  que  le  schéma  est  aussi  crédible  que  la

situation  elle-même  lorsqu'on  en  fait  l'analyse.

♦ Situation  visuelle  et  géométrique  :  la  modélisation  graphique  peut  se  faire

par  report  de  segments  plutôt  que  par  mesurage.

♦ Présence  de  plusieurs  grandeurs  dans  la  situation,  donc  sensibilisation  à  la

notion  de  paramètre  qui  est  travaillée  en  quatrième  secondaire  puisque  nous

devons  fixé  les  grandeurs  qui  ne  nous  intéressent  pas  dans  ce  cas-ci.

♦ Cette  situation  est  très  riche.  Pour  cette  raison,  il  est  possible  de  l'exploiter

d'une  manière  différente  à  chaque  niveau:

-Secondaire  2  :  Modélisation  graphique  à  partir  de  l'expérience

-Secondaire  3  :  Modélisation  graphique  à  partir  du  schéma

\*Les  chiffres  dans  les  cases  du  tableau  de  traduction  désigne  le  niveau  où  la

traduction  a  été  faite  dans  les  activités  des  pages  qui  suivent.

\*\*Dans  le  cas  où  nous  avons  un  schéma  à  l'échelle.

-Secondaire  4  :  Modélisation  formelle

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 101

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**LE  DRAPEAU DU SCOUT - REPRÉSENTATION  SCHÉMATIQUE**

**Grandeurs présentes dans la situation:**

d  :  distance  horizontale  entre  le  scout  et  le  mât

h  :  hauteur  du  drapeau  par  rapport  au  sol

t  :  hauteur  de  la  taille  (ceinture)  du  scout  par  rapport  au  sol

m  :  hauteur  du  mât

c  :  longueur  de  la  corde

**c**

**m**

**t**

**h**

**d**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 102

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement,  c'est-à-dire  qu'il  ne  fait  que  lire  l'énoncé  du  problème  aux  élèves.  Si  le  matériel  est

disponible  pour  faire  un  montage  en  classe,  on  peut  montrer  brièvement  le  fonctionnement  du  mât  en  s'assurant  de  ne  rien  spécifier  sur  la

variation  des  grandeurs.

2.  L'enseignant  demande  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  faire  la  distinction  entre  les  grandeurs  qui  varient  et  les  grandeurs  que  nous

fixerons  momentanément  (que  nous  appellerons  éventuellement  paramètres).  Parmi  ces  grandeurs,  on  retrouve  entre  autres  la  distance

entre  le  scout  et  le  mât,  la  hauteur  du  drapeau,  la  hauteur  du  mât,  la  hauteur  de  la  taille  du  scout,  la  longueur  de  la  corde,…

3.  Maintenant  que  l'inventaire  des  grandeurs  présentes  dans  cette  situation  est  fait,  l'enseignant  spécifie  les  deux  grandeurs  privilégiées  :  la

distance  horizontale  entre  le  scout  et  le  pied  du  mât  de  même  que  la  hauteur  du  drapeau.  Par  la  suite,  il  demande  aux  élèves  de  décrire

leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la

grandeur  conséquente  en  plus  de  permettre  à  l'enseignant  de  cerner  la  façon  selon  laquelle  l'étudiant  appréhende  la  situation.  Ainsi,  on

peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  le  scout  est  loin,  plus  le  drapeau  monte.»  [Grandeur  prédominante  :  distance  scout-mât  ]

B-«Plus  le  drapeau  est  haut,  plus  le  scout  est  loin.»  [Grandeur  prédominante  :  hauteur  du  drapeau]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  distance  séparant  le  scout  du  mât  est  grande,  plus  le  drapeau  est  haut.»  [Grandeur  prédominante  :  distance  scout-mât]

B-«Plus  le  drapeau  est  haut,  plus  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  est  grande.»  [Grandeur  prédominante  :  hauteur  du  drapeau]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  qui  a  été  dite.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 103

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

4.  Maintenant  que  nous  avons  choisi  notre grandeur**Hauteur  du  drapeau  selon  la  distance  séparant  le  scout  du  mât**

prédominante,  il  est  possible  d'identifier nos  axes **hauteur  du  drapeau**

sur  notre  représentation  graphique  :  la grandeur

prédominante  est  placée  en  abscisse  et  la grandeur

conséquente  est  placée  en  ordonnée.

**distance  scout-mât**

5.  Maintenant,  il  faut  s'interroger  sur  les  valeurs

possibles  que  peuvent  prendre  chacune  des  grandeurs  et  plus  particulièrement  les  valeurs  extrêmes  pour  lesquelles  la  situation  pourra

avoir  lieu.  Dans  ce  cas-ci,  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  peut  être  de  0  jusqu'à  la  distance  où  la  corde  va  être  au  maximum  de  sa

longueur  et  le  drapeau  au  sommet  du  mât.  La  hauteur  du  drapeau,  quant  à  elle,  peut  prendre  des  valeurs  de  0  jusqu'à  la  hauteur  maximale

qui  correspond  à  la  hauteur  du  mât.  (Nous  venons  donc,  sans  le  mentionner  explicitement,  de  définir  le  domaine  et  le  codomaine  de  la

situation.)  Le  temps  est  maintenant  venu  de  graduer  nos  axes  sur  notre  modélisation  graphique.  Après  avoir  positionné  les  valeurs

maximales  sur  chacun  des  axes,  nous  devons  choisir  des  subdivisions  (graduations)  qui  seront  elles  aussi  représentatives  de  la  situation.

Par  exemple,  si  le  scout  fait  six  pas  avant  que  le  drapeau  n'atteigne  le  haut  du  mât,  on  peut  diviser  le  segment  de  droite  (sur  l'axe)  qui  va

de  0  jusqu'à  la  distance  maximale  en  six  parties  égales  :  une  première  division  en  deux  parties  égales  et  une  seconde  division  de  chaque

partie  en  trois  parties  égales.  Pour  ce  qui  est  de  la  hauteur  du  mât,  il  est  possible  de  partager  le  segment  de  droite  en  deux  parties  égales

un  certain  nombre  de  fois

jusqu'à ce que l'on ait

suffisamment de valeurs

**Hauteur  du  drapeau  selon  la  distance  séparant  le  scout  du  mât**

**hauteur  du  drapeau**

pour faire des lectures

facilement sur le

graphique. Cette  hauteur  du  mât  :  m

graduation  pourra  toujours

être  modifiées  selon les

besoins plus tard dans

l'activité.

**distance  scout-mât**

**0**

**0**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 104

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

6.  L'enseignant  demande  alors  aux  élèves  de  faire  le  graphique  qui  représente  leur  interprétation  de  la  situation.  Pendant  que  les  élèves

travaillent,  l'enseignant  circule  dans  la  classe  afin  d'identifier  différents  types  de  graphiques  (droite  passant  par  l'origine,  courbe  incurvée

vers  le  haut  ou  vers  le  bas,  …)  faits  par  les  élèves.  Il  distribue  des  acétates  à  certains  étudiants  afin  de  les  amener,  un  peu  plus  tard,  à

expliquer  au  reste  de  la  classe  le  graphique  qui  traduit  leur  perception  de  la  situation.

7.  L'enseignant  demande  aux  étudiants  présélectionnés  de  venir  présenter,  à  tour  de  rôle,  leur  modélisation  graphique  à  l'avant  de  la  classe.

Il  faut  surtout  s'assurer  qu'il  y  ait  concordance  entre  la  verbalisation  qui  est  faite  et  le  graphique  tracé  par  l'élève.  L'enseignant  doit  donc

corriger  le  discours  afin  de  s'assurer  que  la  grandeur  prédominante  le  soit  tout  au  long  de  la  verbalisation  et  que  l'élève  ne  fait  pas

apparaître  dans  son  discours  des  grandeurs  qui  ne  sont  pas  considérées  dans  la  situation.  (Nous  pouvons  nous  attendre  entre  autres  à  ce

que  le  temps  apparaisse  et  il  faudrait  alors  faire  réaliser  aux  élèves  que  nous  n'avons  pas  besoin  du  temps  pour  expliquer  cette  situation.)

8.  Pour  vérifier  les  hypothèses  émises,  nous  allons  réaliser  l'expérience  afin  de  valider  les  différentes  hypothèses  émises  par  les  élèves  et

produire  la  modélisation  graphique  au  fur  et  à  mesure  par  report  de  segments  sans  relever  de  données  numériques.  Nous  n'utiliserons

donc  pas  le  mode  de  représentation  table  de  valeurs.  Si  nous  avons  la  chance  d'avoir  un  mât  et  un  drapeau  en  classe,  tant  mieux!  Il  est

possible  d'en  simuler  un  simplement  à  l'aide  d'une  corde  et  d'un  bâton.  Il  est  alors  possible  de  procéder  immédiatement  au  relevé  des

segments. Cependant,  cela  ne  se  fait  pas  sans  difficultés  puisqu'il  faut  être  au  moins  deux  personnes  pour  manipuler  le  matériel  et

reporter  les  segments  issus  de  l'expérience.  Si  on  ne  dispose  pas  de  ce  matériel,  il  est  possible  de  réaliser  l'expérience  à  partir  du  schéma

de  la  situation  :  lorsqu'on  déplace  notre  scout,  il  faut  seulement  se  rappeler  que  la  longueur  de  la  corde  est  constante  (puisque  ce  n'est  pas

une  grandeur  qui  nous  intéresse,

on  la  fixe). Les  élèves  risquent

cependant  d'avoir  de  la  difficulté  à

accepter  qu'un  schéma  soit  aussi

**Hauteur  du  drapeau  selon  la  distance  séparant  le  scout  du  mât**

**hauteur  du  drapeau**

représentatif que la situation

(expérience) elle-même. Les  hauteur  du  mât  :  m

élèves  doivent  être  convaincus  que

le  schéma  est  valable  pour  qu'on

puisse l'utiliser sans quoi la

situation  n'aura  servi  à  rien.  Ainsi,

il  faut  que  la  somme  des  segments

de  corde  du  scout  au  mât  et  du  mât

au  drapeau  soit  constante.

**distance  scout-mât**

**0**

distance  maximale  (corde  tendue  au  maximum)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 105

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

9.  Plusieurs  élèves  auront  sûrement  pensé  qu'il  s'agissait  là  d'une  situation  proportionnelle  puisqu'ils  ont  l'impression  qu'à  chaque  fois  que  le

scout  avance  d'un  pas,  il  fait  monter  le  drapeau  d'une  même  hauteur,  ce  qui  n'est  pas  le  cas.  Ils  auront  donc  sûrement  modéliser  la

situation  par  un  segment  de  droite  passant  par  l'origine  du  plan  cartésien.  Après  avoir  placé  un  certain  nombre  de  points  dans  notre

graphique  par  report  de  mesures,  il  est  possible  de  constater  que  l'allure  générale  de  la  courbe  semble  plutôt  incurvée  vers  le  haut.

Encore  là,  il  ne  faut  pas  tracer  tout  de  suite  la  courbe  à  main  levée  puisqu'on  ne  sait  pas  vraiment  ce  qui  se  passe  entre  deux  points  précis

de  cette  courbe.  Il  est  possible  d'ajouter  des  points  entre  deux  pour  vérifier  si  "la  tendance  se  maintient".  Concrètement,  cela  signifie

donc  de  subdiviser  nos  graduations  actuelles  en  graduations  plus  petites  (peut-être  à  la  demie).  Après  quelques  ajouts,  il  est  possible  de

mentionner  que  la  courbe  semble  être  ouverte  vers  le  haut.  Il  ne  faut  rien  affirmer  puisque  la  situation  n'a  pas  été  analysée  de  façon

détaillée  pour  mettre  en  évidence  la  variation  des  deux  grandeurs.  Cette  analyse  plus  poussée  viendra  en  troisième  secondaire  où  l'on

commence  à  étudier  les  différents  types  de  variation..

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 106

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation  de  cette situation dans une classe de troisième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement,  c'est-à-dire  qu'il  ne  fait  que  lire  l'énoncé  du  problème  aux  élèves. En  troisième

secondaire,  les  élèves  devraient  être  en  mesure  de  travailler  la  situation  simplement  à  partir  du  schéma  de  la  situation.  Nous  pouvons

donc  faire  une  représentation  schématique  de  la  situation  où  on  met  en  évidence  la  présence  d'un  triangle  rectangle.

2.  L'enseignant  demande  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  faire  la  distinction  entre  les  grandeurs  qui  varient  et  les  grandeurs  que  nous

fixerons  momentanément  (que  nous  appellerons  éventuellement  paramètres).  Parmi  ces  grandeurs,  on  retrouve  entre  autres  la  distance

entre  le  scout  et  le  mât,  la  hauteur  du  drapeau,  la  hauteur  du  mât,  la  hauteur  de  la  taille  du  scout,  la  longueur  de  la  corde,…

3.  Maintenant  que  l'inventaire  des  grandeurs  présentes  dans  cette  situation  est  fait,  l'enseignant  spécifie  les  deux  grandeurs  privilégiées  :  la

distance  horizontale  entre  le  scout  et  le  pied  du  mât  de  même  que  la  hauteur  du  drapeau.  Par  la  suite,  il  demande  aux  élèves  de  décrire

leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la

grandeur  conséquente  en  plus  de  permettre  à  l'enseignant  de  cerner  la  façon  selon  laquelle  l'étudiant  appréhende  la  situation.  Ainsi,  on

peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes  qui  ont  autant  de  chances  l'une  que  l'autre  d'être  prononcées  par  les  élèves:

A-«Plus  le  scout  est  loin,  plus  le  drapeau  monte.»  [Variable  indépendante  :  distance  scout-mât  ]

B-«Plus  le  drapeau  est  haut,  plus  le  scout  est  loin.»  [Variable  indépendante:  hauteur  du  drapeau]

L'enseignant  peut  alors  répéter  la  phrase  en  en  changeant  la  formulation  afin  d'habituer  les  élèves  à  utiliser  un  vocabulaire  plus  varié

qui  fait  référence  à  la  variation  des  grandeurs  de  façon  plus  explicite.

A-«Plus  la  distance  séparant  le  scout  du  mât  est  grande,  plus  le  drapeau  est  haut.»  [Variable  indépendante:  distance  scout-mât]

B-«Plus  le  drapeau  est  haut,  plus  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  est  grande.»  [Variable  indépendante  :  hauteur  du  drapeau]

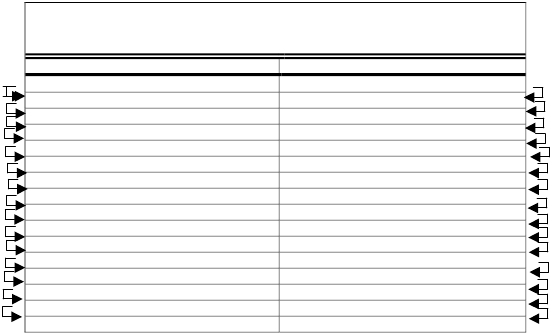
\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  qui  a  été  dite.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 107

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

4.  Maintenant  que  les  variables  sont  choisies,  nous  allons  nous  interroger  sur  les  valeurs  possibles  qu'elles  peuvent  prendre.  Dans  ce  cas-ci,

notre  variable  indépendante  qui  est  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  va  varier  de  0  jusqu'à  une  certaine  distance  où  le  drapeau  sera

rendu  au  sommet  du  mât.  Il  s'agit  du  domaine  de  la  situation.  Il  est  possible  de  déterminer  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  lorsque  le

drapeau  est  au  sommet  du  mât  en  utilisant  la  relation  de  Pythagore  dans  le  triangle  rectangle  illustré  dans  notre  représentation

schématique.  La  hauteur  du  drapeau,  notre  variable  dépendante,  va  varier  de  0  jusqu'à  la  hauteur  maximale  qui  correspond  à  la  hauteur

du  mât.  Il  s'agit  du  codomaine  (ou  encore  de  l'image)  de  la  situation.  Nous  venons  donc  de  déterminer  les  dimensions  de  la  fenêtre

rectangulaire  dans  laquelle  nous  tracerons  le  graphique.

5.  En  troisième  secondaire,  comme  nous  nous  intéressons  de  façon  spécifique  à  la  caractéristique  de  variation  du  modèle  linéaire,  nous  ne

pourrons  plus  nous  contenter  de  tracer  un  graphique  à  l'aide  des  marches-états.  Nous  allons  pour  se  faire  contrôler  la  variation  de  notre

variable  indépendante,  la  distance  horizontale  entre  le  scout  et  le  pied  du  mât,  en  utilisant  une  règle  de  variation  fixe.  Par  la  suite,  nous

allons  observer  la  façon  dont  varie  la  hauteur  du  drapeau.

6.  Pour  voir  la  façon  selon  laquelle  la  situation  se  comporte,  il  est  possible  de  réaliser  l'expérience  ou  encore  de  se  baser  sur  un  schéma  fait

l'enseignant  peut  demander  à  la  moitié  des  élèves  de  travailler  dans  le  tableau  de  valeurs  et  à  l'autre  moitié  de  travailler  en  mode

graphique.  Examinons  ce  qu'il  en  est  dans  le  tableau  de  valeurs.

**La  hauteur  du  drapeau  placé  sur  un  mât  selon  la  distance  séparant  le  scout  du  mât**

**(hauteur du mât : 2 m)**

**(longueur de la corde : 3,25 m)**

**(hauteur de la taille du scout : 0,75 m)**

**Distance  séparant  le  scout  du  mât  (m)** **Hauteur  du  drapeau  (m)**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

**+0,20**

0,00                               0

0,20                              0,02

0,40                              0,06

0,60                              0,14

0,80                              0,23

1,00                              0,35

1,20                              0,48

1,40                              0,63

1,60                              0,78

1,80                              0,94

2,00                              1,10

2,20                              1,28

2,40                              1,46

2,60                              1,64

2,80                              1,82

3,00                              2,00

**+0,02**

**+0,04**

**+0,08**

**+0,09**

**+0,12**

**+0,13**

**+0,15**

**+0,15**

**+0,16**

**+0,16**

**+0,18**

**+0,18**

**+0,18**

**+0,18**

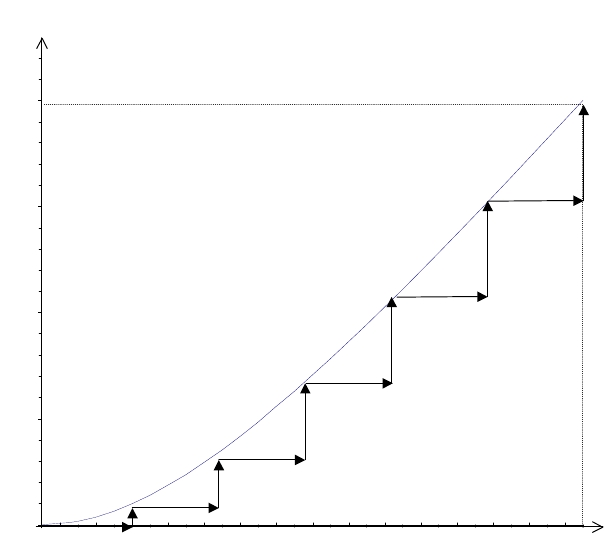
**+0,18**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 108

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

7.  Comme,  dans  le  mode  graphique,

on s'intéresse surtout aux**hauteur  du**

accroissements,  nous  ne  reporterons**drapeau**

pas  les  segments  complets  qui  sont

**Hauteur du drapeau selon la distance horizontale entre le scout et le mât**

issus  de  l'expérience. Nous  allons

plutôt  considérer  les  segments  qui

représentent  les  accroissements  de

chacune  des  grandeurs. Une  des

conséquences  de  cela  sera  qu'on  ne

se  repart  pas  de  l'origine  à  chaque

fois. Il suffit de placer

l'accroissement de la variable

indépendante au point où nous

sommes  rendus  et  l'accroissement

de  la  variable  dépendante  à  sa  suite.

8.  Maintenant, nous allons nous

interroger pour savoir s'il est

possible de relier les différents

points  ainsi  déterminés  pour  tracer

notre  courbe.  Il  faut  donc  examiner

ce  qui  se  passe  si  nous  considérons

des  accroissements  plus  petits  de  la

variable indépendante (ici la

distance  scout-mât).  En  examinant

la  situation  de  ce  point  de  vue,  il  est

possible de remarquer que peu

importe  la  distance  à  laquelle  le

scout  se  trouve  par  rapport  au  mât,

2,00

1,50

1,00

0,50

0,00

**distance**

**scout-mât**

0     0,2    0,4    0,6    0,8     1     1,2    1,4    1,6    1,8     2     2,2    2,4    2,6    2,8     3

le  drapeau  augmente  d'une  hauteur

supérieure  à  l'augmentation  qu'il  avait  eu  à  la  position  précédente.  Graphiquement,  pour  tout  accroissement  de  la  variable  indépendante

(peu  importe  où  on  se  trouve  sur  le  graphique),  nous  avons  toujours  un  accroissement  de  la  variable  dépendante  qui  soit  supérieur  à  celui

qui  était  associé  à  l'accroissement  précédent  de  la  variable  indépendante.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 109

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

9.  Il  convient  maintenant  de  faire  le  lien  entre  la  table  de  valeurs  et  le  graphique  afin  de  bien  mettre  en  évidence  la  correspondance  entre  ces

deux  modes  de  représentation.  Pour  faire  cela,  il  suffit  de  vérifier  si  les  accroissements  calculer  dans  la  table  de  valeurs  correspondent

aux  segments  orientés  (flèches)  qui  partent  d'un  point  précis  de  notre  graphique.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 110

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de quatrième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement  et  fait  un  schéma  représentant  la  situation  au  tableau.  Nous  supposerons  que  nous

avons  initialement  un  mât  de  2m  de  hauteur,  une  corde  de  3,25m  de  longueur  et  que  la  taille  du  scout  est  à  0,75  m  de  hauteur  par  rapport

au  sol.

2.  L'enseignant  demande  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  se  préparer  graduellement  à  l'étude  des  paramètres  qui  peut  être  faite  en  quatrième

secondaire.  Au  fur  et  à  mesure  que  les  grandeurs  sont  énumérées,  on  les  représente  sur  le  schéma  de  la  situation  et  on  les  identifie  par

une  lettre.  Parmi  ces  grandeurs,  on  retrouve  entre  autres  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât(d),  la  hauteur  du  drapeau(h),  la  hauteur  du

mât(m),  la  hauteur  de  la  taille  du  scout(t),  la  longueur  de  la  corde  (  c  ),…

3.  Maintenant  que  l'inventaire  des  grandeurs  présentes  dans  cette  situation  est  fait,  l'enseignant  spécifie  les  deux  grandeurs  privilégiées  :  la

distance  entre  le  scout  et  le  mât  de  même  que  la  hauteur  du  drapeau.  Par  la  suite,  il  demande  aux  élèves  de  décrire  leur  perception  de  la

situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  variable  indépendante  et  quelle  est  la  variable  dépendante.  Ainsi,

on  peut  s'attendre  à  deux  types  de  phrases  différentes:

A-«Plus  la  distance  séparant  le  scout  du  mât  est  grande,  plus  le  drapeau  est  haut.»  [Variable  indépendante  :  distance  scout-mât]

B-«Plus  le  drapeau  est  haut,  plus  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  est  grande.»  [Variable  indépendante  :  hauteur  du  drapeau]

\*Dans  la  suite  de  cet  exemple,  nous  allons  supposer  que  c'est  la  phrase  A  qui  a  été  dite.

4.  Nous  savons  que  pour  une  distance  donnée  entre  le  scout  et  le  mât,  nous  n'obtenons  qu'une  seule  valeur  de  la  hauteur  du  drapeau  qui  lui

est  associée,  alors  notre  situation  est  une  fonction.  La  hauteur  du  drapeau  (h)  est  associée  à  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  (d)  par  une

certaine  règle  que  nous  ne  connaissons  pas  et  que  nous  nommerons  temporairement  f.  Nous  avons  donc  h=f(d)=?

5.  Faisons  maintenant  une  petite  étude  de  cette  fonction:

 Domaine  :  [0,3]

 Image  :  [0,2]

 Points  caractéristiques  :  (0,0)  ;  maximum=2  lorsque  d=3

 La  fonction  est  croissante  sur  tout  le  domaine.  (Lorsque  d  augmente,  h  augmente.)

 La  fonction  est  positive  sur  tout  le  domaine  puisque  les  hauteurs  de  drapeau  sont  toujours  mesurées  au-dessus  du  sol.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 111

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

6.  Il  est  maintenant  possible  de  tracer  le  graphique  de  la  fonction  comme  cela  a  été  fait  en  troisième  secondaire.  Ce  que  nous  allons  faire  de

nouveau,  c'est  de  nous  interroger  sur  l'effet  des  paramètres.  En  effet,  nous  allons  modifié  les  différentes  grandeurs  que  nous  avions

fixées  jusqu'ici  et  allons  nous  questionner  sur  l'impact  de  cette  modification  sur  le  graphique  de  la  situation.

→ La  longueur  de  la  corde

→  Si  la  corde  est  plus  petite,  le  drapeau  ne  pourra  plus  être  au  sol  lorsque  le  scout  est  près  du  mât.  Le  drapeau  sera  donc  à  une  certaine  hauteur

initiale.  Graphiquement,  c'est  comme  si  la  courbe  du  graphique  avait  subi  une  translation  verticale  vers  le  haut  puisqu'il  n'y  a  que  la  valeur  initiale

qui  est  modifiée,  pas  la  variation.

→  Si  la  corde  est  plus  longue,  le  drapeau  restera  au  sol  même  lorsque  le  scout  aura  avancé  d'une  certaine  distance  puisque  la  corde  ne  sera  pas  tendue.

Il  y  aura  du  "lousse".  Graphiquement,  nous  aurons  un  certain  intervalle  de  distances  où  la  hauteur  du  drapeau  est  nulle  avant  qu'elle  augmente.  Le

graphique  a  donc  subi  une  translation  horizontale  vers  la  droite  et  nous  avons  ajouté  un  segment  horizontal  de  l'origine  jusqu'au  premier  point  de  la

courbe  originale.

→ La  hauteur  du  mât

→  Si  le  mât  est  plus  grand,  le  drapeau  ne  pourra  plus  être  au  sol  lorsque  le  scout  est  près  du  mât.  Le  drapeau  sera  donc  à  une  certaine  hauteur  initiale.

Graphiquement,  c'est  comme  si  la  courbe  du  graphique  avait  subi  une  translation  verticale  vers  le  haut  puisqu'il  n'y  a  que  la  valeur  initiale  qui  est

modifiée,  pas  la  variation.

→  Si  le  mât  est  plus  petit,  le  drapeau  restera  au  sol  même  lorsque  le  scout  aura  avancé  d'une  certaine  distance  puisque  la  corde  ne  sera  pas  tendue.  Il

y  aura  du  "lousse".  Graphiquement,  nous  aurons  un  certain  intervalle  de  distances  où  la  hauteur  du  drapeau  est  nulle  avant  qu'elle  augmente.  Le

graphique  a  donc  subi  une  translation  horizontale  vers  la  droite  et  nous  avons  ajouté  un  segment  horizontal  de  l'origine  jusqu'au  premier  point  de  la

courbe  originale.

→ La  taille  du  scout

→  Si  la  taille  du  scout  est  plus  petite,  le  drapeau  ne  pourra  plus  être  au  sol  lorsque  le  scout  est  près  du  mât.  Le  drapeau  sera  donc  à  une  certaine

hauteur  initiale.  Graphiquement,  c'est  comme  si  la  courbe  du  graphique  avait  subi  une  translation  verticale  vers  le  haut.  En  plus  de  cela,  pour

chaque  pas  que  fait  le  scout,  le  drapeau  montera  en  hauteur  d'une  valeur  supérieure  à  celle  de  la  situation  initiale.  Le  drapeau  atteindra  plus

"rapidement"  sa  hauteur  maximale.  Graphiquement,  il  y  aura  une  contraction  de  la  courbe  autour  de  l'axe  des  ordonnées.

→  Si  la  taille  du  scout  est  plus  grande,  le  drapeau  restera  au  sol  même  lorsque  le  scout  aura  avancé  d'une  certaine  distance  puisque  la  corde  ne  sera

pas  tendue.  Il  y  aura  du  "lousse".  Graphiquement,  nous  aurons  un  certain  intervalle  de  distances  où  la  hauteur  du  drapeau  est  nulle  avant  qu'elle

augmente.  Le  graphique  a  donc  subi  une  translation  horizontale  vers  la  droite  et  nous  avons  ajouté  un  segment  horizontal  de  l'origine  jusqu'au

premier  point  de  la  courbe  originale.  En  plus  de  cela,  pour  chaque  pas  que  fait  le  scout,  le  drapeau  montera  en  hauteur  d'une  valeur  inférieure  à

celle  de  la  situation  initiale.  Le  drapeau  atteindra  moins  "rapidement"  sa  hauteur  maximale.  Graphiquement,  il  y  aura  une  dilatation  de  la  courbe

autour  de  l'axe  des  ordonnées.

→  La  position  initiale  du  scout

→  Si  le  scout  est  plus  loin  du  mât,  le  drapeau  sera  donc  à  une  certaine  hauteur  initiale.  Graphiquement,  c'est  comme  si  la  courbe  du  graphique  avait

subi  une  translation  horizontale  vers  la  gauche  puisque  nous  devons  aller  chercher  les  hauteurs  du  drapeau  sur  le  graphique  initial  à  des  valeurs

supérieures  et  les  ramener..

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 112

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

7.  Pour  déterminer  cette  règle,  il  va  falloir  analyser  de  façon  plus  détaillée  le  schéma  représentant  la  situation.  Comme  nous  percevons  des

triangles  rectangles  dans  ce  schéma,  nous  sommes  en  mesure,  à  l'aide  de  nos  connaissances  en  géométrie,  de  trouver  des  formules  qui

associent  nos  deux  variables.  Les  élèves  peuvent  cependant  avoir  de  la  difficulté  à  gérer  le  triangle  dans  la  situation.  Il  est  possible  que

certains  élèves  choisissent  une  procédure  qui  soit  telle  qu'ils  inversent  les  variables  indépendantes  et  dépendantes.  C'est  à  l'enseignant  de

porter  attention  à  cela  et  de  mettre  cette  erreur  en  évidence  si  elle  se  produit.

Nous  savons  que  la  distance  entre  le  scout  et  le  mât  est  une  de  nos  variables  que  nous

identifierons  par  la  lettre  d  et  que  la  distance  entre  la  taille  du  scout  et  le  sommet  du  mât

aura  une  valeur  constante  égale  à  la  différence  entre  la  hauteur  du  mât  (m)  et  la  hauteur

de  la  taille  du  scout  (t)  qui  sont  toutes  deux  des  grandeurs  constantes  dans  ce  cas-ci

puisque  nous  les  fixons  pour  les  besoins  de  notre  analyse.  Il  s'agit  ici  de  paramètres.

Nous  noterons  donc  la  distance  entre  la  taille  du  scout  et  le  sommet  du  mât  (m-t).

*d* 2   *m*  *t* 

2

Par  Pythagore,  nous  savons  donc  que  la  longueur  de  corde  entre  le  sommet  du  mât  et  le

*c*   *d*  *m*  *t* 

scout  est  définie  par  l'expression *d* 2    (*m*  *t*) 2  .  (Voir  le  schéma  ci-contre.)

La  longueur  de  corde  qui  longe  le  mât  (corde  allant  du  drapeau  au  sommet  du  mât)  est

donc  égale  à  la  différence  entre  la  longueur  totale  de  la  corde  (  c  )  et  la  longueur  de

2           2

*(m-t)*

corde  entre  le  sommet  du  mât  et  le  scout. Cette  longueur  est  donc  définie  par

l'expression *c*   *d*   (*m*  *t*)  .

2 2*m*

La  hauteur  du  drapeau(h),  quant  à  elle,  correspond  à  la  différence  entre  la  hauteur  du

mât  (m)  et  la  longueur  de  corde  entre  le  drapeau  et  le  sommet  du  mât

*d*

(*c*  

*d* 2    (*m*  *t*) 2  ).  Ainsi,  la  hauteur  du  drapeau  est  déterminée  par  la  règle

suivante:



*h*  *f*  (*d* )  *m*  *c*   *d* 2   *m*  *t* 

2



Remplaçons  maintenant  certaines  grandeurs  par  les  valeurs  qui  sont  connues:

*h*

2

*h*  *f*  (*d* )    2    3,25  *d* 2   2    0,75  

 

On  voit  clairement  que  ce  n'est  pas  une  formule  représentative  du  modèle  linéaire

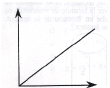
(y=ax+b).

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 113

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Il  est  possible  de  modifier  le  mécanisme  de  fonctionnement  du  drapeau.  Par  exemple,  on  peut  ajouter  une  deuxième  poulie  à  la  hauteur

de  la  taille  du  scout  de  telle  sorte  qu'on  tire  la  corde  horizontalement.

  On  peut  modifier  certains  paramètres  de  la  situation  et  regarder  l'influence  de  cette  modification  sur  l'allure  du  graphique.

  On  peut  réutiliser  cette  situation  dans  l'étude  des  fonctions  racines  carrées  en  cinquième  secondaire.

**Exercice (secondaire 4)**

Les  graphiques  suivant  illustrent  chacun  la  hauteur,  en  fonction  du  temps,  d'un  drapeau  que  hisse  un  jeune  scout.

a)Faire  une  description  (en  mots)  de  la  relation  entre  la  hauteur  et  le  temps.

b)Pour  chaque  graphique,  l'interpréter  de  façon  à  décrire  les  action  successives  du  jeune  scout  correspondant  à  celui-ci.

**A** **B** **C** **D** **E** **F**

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 114

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** | **X** | **X** | **X** |  | **X** | **X** |
| **Verbal** |  | **X** | **X** |  |  | **X** |
| **Schéma** | **X** | **X** | **X** |  | **X** | **X** |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** | **X** |  | **X** |  |
| **Formel** | **X** | **X** | **X** |  | **X** | **X** |

**Énoncé du problème**

**SITUATION 13 - LA CHÈVRE**

**Tableau de traduction**

Une  chèvre  est  attachée  avec  une  laisse  qui  peut  coulisser  sur  une  corde  qu'on  a

tendu  entre  deux  piquets  de  bois  plantés  dans  le  sol.  En  quête  d'espace  et  de

liberté,  notre  chèvre  garde  toujours  sa  laisse  tendue.  Un  schéma  se  trouve  à  la

page  suivante.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes:  la  distance  parcourue  par  la

chèvre  sur  la  périphérie  de  la  surface  qui  lui  est  accessible,  la  quantité  de  corde

utilisée  (corde  du  piquet  1  jusqu'à  l'anneau  de  la  laisse  et  la  longueur  de  la

laisse).

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ C'est  une  situation  qui  est  facilement  modélisable  dans  tous  les  modes,  y

compris  le  mode  formel.

♦ Il  y  a  un  travail  sur  les  paramètres  qui  peut  être  fait  de  façon  très  accessible

aux  élèves  puisque  le  lien  entre  le  verbal,  le  formel  et  le  graphique  est  assez

évident.

♦ Situation  visuelle  et  géométrique  :  la  modélisation  graphique  peut  se  faire

par  report  de  segments  plutôt  que  par  mesurage.

♦ L'idée  de  base  de  cette  situation  permet  de  générer  une  foule  d'autres

situations  intéressantes  comme  nous  l'expliquons  dans  les  prolongements

de  cette  situation.

♦ La  situation  permet  d'aborder  en  parallèle  d'autres  notions  de  quatrième  et

cinquième  secondaire  :  distance  et  lieu  géométrique.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 115

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**LA  CHÈVRE - REPRÉSENTATION  SCHÉMATIQUE**

**Anneau**

**Piquet  1** **Piquet  2**

**Chèvre**

**Point  de  départ  de  la  chèvre**

**Trajectoire  suivie  par  la  chèvre**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 116

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Variable  indépendante**  **(grandeur**  **prédominante)** | **Distance  parcourue  par  la  chèvre  sur  sa**  **trajectoire  à  partir  du  point  de  départ**  \*Cas  que  nous  allons  privilégier | **Quantité  de  corde  utilisée**  **(piquet  1**  **anneau**  **chèvre)**  \*Verbalisation  très  difficile |
| **Exemple  de  discours**  **(verbal)** | <<Lorsque  la  chèvre  se  déplace  sur  sa  trajectoire  en  direction  du  piquet  2,  la  quantité  de  corde  augmente.  Lorsqu'elle  tourne  autour  du  piquet  2,  la  quantité  de  corde  utilisée  demeure  constante.  Lorsque  la  chèvre  revient  vers  le  piquet  1,  la  quantité  de  corde  utilisée  diminue.  Lorsque  la  chèvre  tourne  autour  du  piquet  1,  la  quantité  de  corde  utilisée  demeure  constante  et  correspond  à  la  longueur  de  la  laisse.>> | <<Lorsque  la  quantité  de  corde  utilisée  est  la  plus  courte,  la  chèvre  a  parcourue  une  distance  sur  sa  trajectoire  qui  fait  en  sorte  qu'elle  se  trouve  sur  le  demi-cercle  près  du  piquet  1.  Lorsque  la  quantité  de  corde  utilisée  est  la  plus  longue,  elle  a  parcouru  une  distance  qui  fait  en  sorte  qu'elle  se  trouve  sur  le  demi-cercle  près  du  piquet  2.  Lorsque  la  quantité  de  corde  utilisée  se  situe  entre  ses  deux  valeurs,  elle  a  parcouru  une  distance  qui  fait  en  sorte  qu'elle  se  trouve  sur  l'un  ou  l'autre  des  segments  de  droite  de  sa  trajectoire.>> |

**Exemple d'exploitation de cette situation dans une classe de quatrième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  la  situation  très  brièvement,  c'est-à-dire  qu'il  ne  fait  que  lire  l'énoncé  du  problème  aux  élèves.

2.  L'enseignant  demande  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  présentes  dans  cette  situation.  Il  est  primordial  que  ce  soient  les  élèves  eux-

mêmes  qui  énumèrent  les  grandeurs  présentes  afin  de  faire  la  distinction  entre  les  grandeurs  qui  varient  et  les  grandeurs  que  nous

fixerons  momentanément  (que  nous  appelons  aussi  paramètres).  Parmi  ces  grandeurs,  on  retrouve  entre  autres:

→ longueur  de  la  laisse

→ distance  entre  les  piquets

→ hauteur  des  piquets

→ superficie  d'herbe  broutée

→ distance  parcourue  par  la  chèvre  sur

sa  trajectoire  depuis  le  départ

→ distance  entre  l'anneau  et  le  piquet  1

→ distance  entre  l'anneau  et  le  piquet  2

→ distance  entre  la  chèvre  et  le  piquet  1

→ distance  entre  la  chèvre  et  le  piquet  2

→ quantité  de  corde  utiliée  (du  piquet  1

à  l'anneau  et  de  l'anneau  à  la  chèvre)

→  périmètre  de  la  figure  délimitée  par  la

trajectoire  de  la  chèvre

→  …

3.  Maintenant  que  l'inventaire  des  grandeurs  présentes  dans  cette  situation  est  fait,  l'enseignant  spécifie  les  deux  grandeurs  privilégiées  :  la

distance  parcourue  par  la  chèvre  depuis  le  départ  de  même  que  la  quantité  de  corde  utilisée.  Par  la  suite,  il  demande  aux  élèves  de

décrire  leur  perception  de  la  situation  en  une  phrase  qui  va  servir  à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la

grandeur  conséquente  en  plus  de  permettre  à  l'enseignant  de  cerner  la  façon  selon  laquelle  l'étudiant  appréhende  la  situation.  Ainsi,  on

peut  s'attendre  à  deux  types  de  discours  différents  par  les  élèves:

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 117

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

4.  Maintenant  que  nous  avons  choisi  notre  grandeur  prédominante,  il  est  possible  d'identifier  nos  axes  sur  notre  représentation  graphique  :

la  grandeur  prédominante  est  placée  en  abscisse  et  la  grandeur  conséquente  est  placée  en  ordonnée.

**Quantité  de  corde  utilisée  par  la  chèvre  selon  la**

**Quantité  de  corde**

**utilisée**

**distance  qu'elle  a  parcouru**

**Distance  parcourue**

**par  la  chèvre**

5.  Maintenant, il faut s'interroger sur les valeurs

possibles  que  peuvent  prendre  chacune  des  grandeurs

et  plus  particulièrement  les  valeurs  extrêmes  pour  lesquelles  la  situation  pourra  avoir  lieu.  Dans  ce  cas-ci,  la  distance  parcourue  par  la

chèvre  sur  sa  trajectoire  varie  entre  0  et  l'infini  (si  la  chèvre  fait  plusieurs  tours  sur  le  même  parcours).  Nous  pouvons  aussi  supposer,

comme  c'est  le  cas  ici,  que  la  chèvre  ne  fait  qu'un  tour  et  que  si  elle  en  faisait  plus,  les  mêmes  phénomènes  seraient  observables  à

nouveau. C'est  une  fonction  qui  est  périodique.  La  quantité  de  corde  utilisée,  quant  à  elle,  varie  entre  la  longueur  de  la  laisse  et  la

somme  de  la  longueur  de  la  laisse  et  de  la  corde  tendue  entre  les  deux  piquets.  Nous  venons  donc  de  définir  le  domaine  et  le  codomaine

de  cette  situation.  Ces  valeurs  détermineront  donc  les  dimensions  de  la  fenêtre  rectangulaire  à  l'intérieur  de  laquelle  nous  tracerons  le

graphique.

6.  Le  temps  est  maintenant  venu  de  graduer  les  axes  de  notre  plan  cartésien..  Après  avoir  positionné  les  valeurs  minimales  et  maximales

sur  chacun  des  axes,  nous  devons  choisir  des  graduations  qui  seront  elles  aussi  représentatives  de  la  situation.  Par  exemple,  pour  la

distance  parcourue  par  la  chèvre,  nous  aurons  une  première  graudation  lorsque  la  chèvre  est  rendue  au  bout  du  segment  de  sa  trajectoire

allant  du  piquet  1  au  piquet  2.  Il  y  en  aura  une  autre  à  la  fin  de  la  portion  semi-circulaire  se  trouvant  près  du  piquet  2.  Il  y  aura  un

troisième  point-repère  lorsque  la  chèvre  sera  rendue  au  bout  du  segment  allant  du  piquet  2  au  piquet  1.  Après  avoir  franchi  l'autre

portion  semi-circulaire,  la  chèvre  aura  fait  un  tour  complet.  Pour  ce  qui  est  de  la  quantité  de  corde  utilisée,  nous  ne  pouvons  placer  que

deux  graduations  approximatives  :  le  minimum(longueur  de  la  laisse)  et  le  maximum  (longueur  de  la  laisse  +  longueur  de  la  corde  tendue

entre  deux  piquets).

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 118

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

7.  L'enseignant  demande  alors  aux  élèves  de  faire  le

graphique  qui  représente  leur  interprétation  de  la

situation. Pendant que les élèves travaillent,

l'enseignant  circule  dans  la  classe  afin  d'identifier

différents  types  de  graphiques  (droite  passant  par

l'origine,  courbe  incurvée  vers  le  haut  ou  vers  le  bas,

…)  faits  par  les  élèves. Il  distribue  des  acétates  à

certains  étudiants  afin  de  les  amener,  un  peu  plus  tard,  à

expliquer  au  reste  de  la  classe  le  graphique  qui  traduit

leur  perception  de  la  situation.

Quantité  de  corde  utilisée  par  la  chèvre  selon  la

distance  qu'elle  a  parcouru

Quantité  de  corde

utilisée

8.  L'enseignant  demande  aux  étudiants  présélectionnés  de

venir  présenter,  à  tour  de  rôle,  leur  modélisation

graphique  à  l'avant  de  la  classe.  Il  faut  surtout  s'assurer

qu'il  y  ait  concordance  entre  la  verbalisation  qui  est

faite  et  le  graphique  tracé  par  l'élève.  L'enseignant  doit

donc  corriger  le  discours  afin  de  s'assurer  que  la

longueur  de  la

laisse

1  tour

**Distance  parcourue**

**par  la  chèvre  sur  sa**

**trajectoire**

grandeur  prédominante  le  soit  tout  au  long  de  la

verbalisation  et  que  l'élève  ne  fait  pas  apparaître  dans  son  discours  des  grandeurs  qui  ne  sont  pas  considérées  dans  la  situation.  (Nous

pouvons  nous  attendre  entre  autres  à  ce  que  le  temps  apparaisse  et  il  faudrait  alors  faire  réaliser  aux  élèves  que  nous  n'avons  pas  besoin

du  temps  pour  expliquer  cette  situation.)

9.  Passons  maintenant  à  la  modélisation  formelle  de  la  situation. Comme  le  graphique  n'appartient  pas  à  un  des  modèle  auquel  nous

sommes  habitués,  nous  devrons  définir  les  règles  de  cette  situation  pour  chaque  partie.

Quantité  de  corde  utilisée

=  longueur  de  la  laisse  +  distance  parcourue  par  la  chèvre

(si  0<distance  parcourue<longeur  de  corde  tendue  entre  les  deux  piquets)

=  longueur  de  la  laisse  +  longueur  de  la  corde  tendue  entre  les  deux  piquets

(si  longeur  de  corde  tendue  entre  les  deux  piquets  <  distance  parcourue  <  1/2  tour)

=  longueur  de  la  laisse  +  longueur  de  la  corde  tendue  entre  les  piquets-  distance  parcourue  par  la  chèvre

(1/2  tour  <  distance  parcourue  <  1/2  tour  +  longueur  de  la  corde  tendue  entre  les  deux  piquets)

=  longueur  de  la  laisse  (si  1/2  tour  +  longueur  de  la  corde  tendue  entre  les  deux  piquets  <distance  parcourue<1  tour)

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 119

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Prolongements  possibles de cette situation**

  Il  est  possible  d'imaginer  une  foule  d'autres  situations  avec  la  seule  idée  d'attacher  une  chèvre:

→  La  chèvre  est  attachée  à  un  coin  de  sa  cabane  carrée.  Elle  se  déplace  autour  de  sa  cabane  en  gardant  toujours  la  corde  tendue.  La

longueur  de  la  corde  est  égale  au  périmètre  de  la  cabane.

→  La  chèvre  est  attachée  après  un  crochet  fixé  dans  le  tronc  d'un  arbre.  Elle  se  déplace  autour  de  l'arbre  en  gardant  la  corde  tendue.

→  La  chèvre  est  dans  un  enclos  de  forme  circulaire.  On  l'attache  après  un  des  poteaux  de  la  clôture  délimitant  cet  enclos.

→  …

  Il  est  possible  de  faire  un  travail  intéressant  sur  les  paramètres  et  d'examiner  ce  qui  se  passe  dans  les  différents  modes  de  représentation.

→ Que  se  passe-t-il  si  on  fait  varier  la  longueur  de  la  laisse  de  la  chèvre?

→ Que  se  passe-t-il  si  on  modifie  la  position  du  point  de  départ  de  la  chevre?

→ Que  se  passe-t-il  si  on  éloigne  les  deux  piquets?  Si  on  les  rapproche?

→ …

  Il  est  possible  de  travailler  la  notion  de  lieu  géométrique  en  cinquième  secondaire  avec  l'idée  de  la  chèvre:

→  Cercle  :  Une  chèvre  est  attachée  à  un  piquet  à  l'aide  d'une  corde.

→  Ellipse  :  Le  collier  d'une  chèvre  est  attachée  à  une  corde  fixée  à  deux  piquets  (cette  dernière  corde  n'est  pas  tendue).

→  Médiatrice  :  La  chèvre  est  reliée  à  deux  piquets  qui  sont  munis  d'un  mécanisme  permettant  de  faire  varier  la  longueur  de  la  corde

du  piquet  à  la  chèvre  tout  en  s'assurant  que  la  chèvre  soit  toujours  à  la  même  distance  des  deux  piquets.

→  …

  Recréer  certaines  de  ces  situations  en  attachant  un  élève  avec  une  corde  dans  la  cours  d'école.  Il  est  possible  de  laisser  certaines  traces

sur  le  sol  en  utilisant  des  craies  de  trottoir.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 120

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **À**  **De** | **Expérience** | **Verbal** | **Schéma** | **Table de**  **valeurs** | **Graphique** | **Formel** |
| **Expérience** |  |  |  |  | **X** |  |
| **Verbal** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Schéma** |  |  |  |  |  |  |
| **Table de**  **valeurs** |  |  |  |  |  |  |
| **Graphique** |  | **X** |  |  | **X** |  |
| **Formel** |  |  |  | **X** |  | **X** |

**Énoncé  du problème**

**SITUATION 14 - Le vol Paris-Montréal**

**Tableau de traduction**

Un  avion  transporte  des  passagers  de  Paris  à  Montréal.

Les  grandeurs  qui  nous  intéressent  sont:  le  temps  que  met  l'avion  à  franchir  la

distance  Paris-Montréal,  la  vitesse  moyenne  de  l'avion  sur  ce  trajet.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Cette  situation  est  d'autant  plus  profitable  qu'elle  est  utilisée  vers  la  fin  de

l'apprentissage  de  la  modélisation  graphique.  En  effet,  lorsque  les  élèves

croient  qu'ils  sont  rendus  bons,  il  est  possible  de  leur  faire  remarquer  que

les  vieux  réflexes  sont  toujours  présents  et  qu'ils  ne  réfléchissent  pas

suffisamment  à  ce  qu'ils  font.  En  effet,  comme  il  est  question  du  temps

dans  les  grandeurs  considérées,  il  y  a  de  fortes  chances  pour  qu'une

chronique  fasse  son  apparition  et  que  les  élèves  soient  piégés  puisque  ce

n'en  est  pas  une.

♦ Contrairement  aux  autres  situations,  notre  représentation  en  mode

graphique  ne  représentera  pas  un  déroulement  unique  d'expérience,  mais

bien  un  ensemble  infini  d'expériences. Chaque  point  de  la  courbe

constituera  un  voyage  en  soi  qui  a  été  fait  en  un  temps  donné.

♦ Il  est  possible  de  faire  une  certaine  réflexion  sur  le  concept  de  limite:  si  je

vais  extrêmement  rapidement,  il  est  possible  que  la  durée  du  vol  s'approche

de  zéro.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 121

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Exemple  d'exploitation de cette situation dans une classe de deuxième secondaire**

1.  L'enseignant  présente  le  problème  à  ses  étudiants  sans  donner  d'indication  sur  la  façon  de  varier  des  deux  grandeurs.

2.  Demander  aux  élèves  d'identifier  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  cette  situation.  En  plus  du  temps  et  de  la  vitesse  moyenne,  il  est

fort  probable  que  la  distance  soit  mentionnée  puisqu'elle  intervient  dans  la  formule  de  la  vitesse.  Dans  ce  cas-ci,  comme  il  s'agit  de  la

distance  entre  Paris  et  Montréal,  il  est  évident  qu'il  s'agira  d'une  grandeur  qui  est  fixée.

3.  L'enseignant  demande  ensuite  aux  élèves  de  décrire,  sur  une  feuille  de  papier,  leur  perception  de  la  situation  par  une  phrase  qui  va  servir

à  mettre  en  évidence  quelle  est  la  grandeur  prédominante  et  quelle  est  la  grandeur  conséquente. Suite  à  l'écriture  de  cette  phrase,

l'emseignant  demande  également  aux  élèves  de  faire  la  modélisation  graphique  de  cette  situation.  Dans  ce  cas-ci,  il  n'y  a  pas  beaucoup

de  discussion  avant  de  passer  à  la  modélisation  graphique  afin  que  l'enseignant  n'influence  en  aucune  façon  la  réalisation  du  graphique

par  un  discours  de  personne  avertie  aux  "pièges"  de  cette  situation.

4.  Pendant  que  les  élèves  réalisent  leurs  modélisations  graphiques,  l'enseignant  circule  dans  la  classe  et  tente  d'identifier  des  élèves  qui  ont

produit  différents  types  de  modélisations  (voir  6  cas  possibles  découverts  lors  d'une  étude  de  Claude  Janvier3  à  la  page  suivante).

5.  Demander  aux  élèves  identifiés  précédemment  de  venir  faire,  à  tour  de  rôle,  la  présentation  de  leur  graphique  à  l'avant  de  la  classe  et

discuter  de  chacune  des  perceptions  d'élèves  afin  d'identifier  les  éléments  qui  s'éloignent  de  notre  situation  initiale.

6.  Avant  de  passer  au  graphique  correct,  il  peut  être  utile  de  mimer  la  situation  et  de  la  visualiser.  Il  s'agit  pour  l'enseignant  de  déplacer  ses

doigts  sur  un  segment  tracé  au  tableau  à  différentes  vitesses.

7.  Il  est  maintenant  possible  de  mettre  en  évidence  le  fait  que  si  on  produit  une  représentation  graphique  à  partir  des  valeurs  que  nous  avons

calculées,  chaque  point  du  graphique  correspondra  à  une  expérience  en  soi  et  que  pour  cette  raison,  on  ne  devrait  pas  relier  les  différents

points  placés  dans  notre  plan  cartésien.  Il  est  également  possible  de  faire  une  réflexion  sur  les  limites  de  cette  situation.  Bien  que  la

courbe  semble  s'approcher  d'un  temps  nul,  le  temps  ne  sera  jamais  nul,  il  y  a  certains  facteurs  de  la  vie  réelle  qui  permettent  de

l'expliquer.  Il  faut  ici  laisser  place  à  la  discussion  et  se  servir  des  idées  les  plus  intéressantes  émises  par  les  élèves  pour  faire  des  liens

avec  des  éléments  d'apprentissages  ultérieurs  lorsque  l'occasion  se  présente  (situation  inversement  proportionnelle,  limite,…)  .

3 JANVIER,  Claude,*Les  graphiques  cartésiens  :  des  traductions  aux  chroniques*  in  Les sciences de l'éducation  ,  numéro  I-3,  1993,  pages17-37.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 122

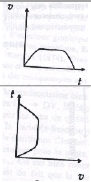
Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Catégories  de**  **représentations**  **des  élèves** | **Exemple  de**  **représentation**  **graphique** | **Exemple  de  phrase  illustrant  la**  **perception  des  élèves** | **Conceptions  diverses  qui  ont  pu  influencer**  **les  élèves  dans  leur  solution** |
| La  relation  linéaire  à                                              <<Plus  ça  va  vite,  moins  ça  prend  de       Idée  générale  de  la  variation  :  lorsque  la  vitesse  pente  négative                                                       temps.>>                                                          augmente,  la  durée  du  vol  diminue.       Pas  de  véritable  réflexion  sur  la  façon  de  varier.       Tendance  à  linéariser. | | | |
| La  relation  linéaire  à                                              <<Plus  ça  va  vite,  moins  ça  prend  de       Mêmes  considérations  que  pour  la  relation  linéaire  à  pente  négative                                                       temps.>>                                                          pente  négative.  corrigée                                                                                                                                       Conscience  de  l'impossibilité  d'avoir  un  vol  si  la  vitesse  est  nulle. | | | |
| La  relation                                                            <<Plus  ça  va  vite,  moins  ça  prend  de       Idée  générale  de  la  variation  :  lorsque  la  vitesse  proportionnelle                                                      temps.>>                                                          augmente,  la  durée  du  vol  diminue.  inverse                                                                                                                                         Véritable  réflexion  sur  la  façon  de  varier.       Possible  recours  à  la  formule  de  la  vitesse. | | | |
| La  chronique                                                         <<Lors  du  décollage,  l'avion  accélère       Il  s'agit  de  la  représentation  de  la  vitesse  de  l'avion  jusqu'à  sa  vitesse  de  croisière.  Par  la  suite,        au  cours  d'un  vol  en  particulier.  la     vitesse     est     constante.        Durant       C'est  une  histoire  qu'on  raconte(chronique).  l'atterissage,  l'avion  ralentit.>>                         Inversion  des  axes  :  énoncé  du  problème  mal  compris. | | | |
| La  chronique                                                         <<La  vitesse  est  nulle  au  début  et  à  la  fin       Il  s'agit  de  la  représentation  de  la  vitesse  de  l'avion  symétrique                                                            du     voyage.       Chacune     des     vitesses        au  cours  d'un  vol  en  particulier.  intermédiaires  apparaît  à  deux  moments       C'est  une  histoire  qu'on  raconte(chronique).  différents.     La  vitesse  maximale  a  été       Axes  placés  d'après  les  consignes.  utilisée     durant     un     long     intervalle     de  temps.>> | | | |
| La  relation  de                                                        <<Plus  je  vais  loin,  plus  ça  prend  de       Tendance  à  linéariser.  croissance.                                                            temps.>>                                                         Mauvais  choix  de  grandeurs  dans  l'analyse  de  la  situation. | | | |



Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 123

**Prolongements possibles de cette situation**

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

  Analyser  certains  articles  de  revues  ou  de  journaux  et  constater  qu'eux  aussi  ont  tendance  à  linéariser  ce  qui  ne  doit  pas  l'être.

  Il  est  possible  de  retravailler  cette  situation  en  troisième  et  en  cinquième  secondaire  lors  de  l'étude  des  fonctions  inversement

proportionnelles.

  Faire  une  réflexion  sur  les  valeurs  réellement  possible  dans  la  vie  courante  et  les  raisons  qui  motivent  ces  contraintes  (puissance  des

moteurs,  force  de  frottement  de  l'air,  raisons  sécuritaires,…)

  En  sciences,  il  y  a  une  multitude  de  situations  qui  sont  analogues  à  celle-ci  en  ce  sens  que  chaque  point  de  la  courbe  constitue  une

expérience  en  soi. On  peut  penser  entre  autres  à  la  taille  d'une  population  de  bactéries  qui  varie  selon  la  température  ou  encore  à

l'expansion  d'une  tige  de  métal  sous  l'effet  de  la  chaleur.

**NOTES   PERSONNELLES**

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 124

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 125

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

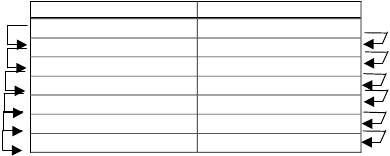
MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 126

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**SITUATION 15 - LA LOCATION D'UN OUTIL**

**Énoncé du problème**

Tu  as  besoin  d'une  sableuse  à  plancher  pour  sabler  les  planchers  de  bois  franc

de  ta  nouvelle  maison.  Comme  tu  n'en  as  pas  et  que  tu  ne  connais  pas  personne

qui  en  possède  une,  tu  dois  en  louer  une.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes:  le  coût  de  la  location,  le  temps

d'utilisation.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

→  Supposons  que  la  location  de  cet  outil  coûte  85$  par  jour  et  qu'il  y  a  un

montant  de  base  de  100$.  Demander  aux  élèves  de  représenter  cette

situation  par  une  table  de  valeurs  et  un  graphique.

→  Déterminer  la  règle  de  la  situation  en  cumulant  les  accroissements  dans

le  tableau  de  valeurs.  <<Le  coût  de  location  de  l'outil  est  de  100$  en

plus  de  85$  autant  de  fois  qu'il  y  a  de  jours  qui  s'écoulent.>>

coût  =  100  +  85  \*  nombre  de  jours

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ C'est  un  bon  exemple  de  situation  appartenant  au  modèle  linéaire.

♦ C'est  une  situation  "proportionnelle  à  une  constante  près"  que  l'on  peut

facilement  modéliser  même  en  deuxième  secondaire.

♦ La  modélisation  formelle  est  facilement  accessible  par  cumul  des

accroissements  si  nous  avons  un  tableau  de  valeurs.

+1

+1

+1

+1

+1

+1

**Nombre  de  jours**              **Coût**

0                100

1                185

2                270

3                355

4                440

5                525

6                610

+85

+85

+85

+85

+85

+85

♦ Il  est  possible  de  faire  un  travail  sur  les  paramètres  en  modifiant  soit  le

montant  de  base  ou  le  tarif  journalier.

→  Modifier  les  paramètres  (montant  de  base  ou  tarif  journalier)  et

observer  l'effet  de  ces  modifications  sur  les  différents  modes  de

représentation.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 127

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 128

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Énoncé du problème**

**SITUATION 16 -LA TASSE DE CAFÉ**

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

Une  personne  se  prépare  deux  tasses  de  café.  Elle  en  laisse  une  reposer  sur  la

table  et  met  l'autre  au  réfrigérateur.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  le  temps  écoulé,  la  température

de  la  tasse  de  café.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ C'est  une  bonne  occasion  pour  travailler  la  notion  de  taux  puisqu'il  est

possible  d'exprimer  le  degré  de  viscosité  en  cm/cuiller.

♦ C'est  un  problème  sur  lequel  nous  ne  nous  pencherions  pas  de  façon

naturelle,  mais  qui  est  tout  de  même  bien  amusant  puisque  nous  comparons

des  produits  de  notre  vie  quotidienne.

♦ Les  grandeurs  sont  interchangeables  puisque  nous  pouvons  contrôler  les

deux  grandeurs  lors  d'une  expérience.

→  Réaliser  l'expérience  en  classe.

→  Faire  des  liens  avec  la  biologie  humaine  et  analyser  les  facteurs

pouvant  occasionner  un  changement  de  la  température  du  corps  et  les

impacts  possibles  :  hypothermie,...

→  Observer  aussi  la  variation  de  température  lorsqu'on  modifie  notre

"café"  en  lui  ajoutant  du  lait  par  exemple.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 129

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 130

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Énoncé du problème**

**SITUATION 17 - LE DEGRÉ DE VISCOSITÉ**

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

Les  différents  produits  liquides  que  nous  utilisons  n'ont  pas  tous  la  même

texture.  Certains  produits  sont  plus  visqueux  que  d'autres.  Est-il  possible  de

classer  ces  produits  selon  leur  degré  de  viscosité?

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  distance  parcourue  par  la

substance,  la  quantité  utilisée.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ C'est  une  bonne  occasion  pour  travailler  la  notion  de  taux  puisqu'il  est

possible  d'exprimer  le  degré  de  viscosité  en  cm/cuiller.

♦ C'est  un  problème  sur  lequel  nous  ne  nous  pencherions  pas  de  façon

naturelle,  mais  qui  est  tout  de  même  bien  amusant  puisque  nous  comparons

des  produits  de  notre  vie  quotidienne.

♦ Les  grandeurs  sont  interchangeables  puisque  nous  pouvons  contrôler  les

deux  grandeurs  lors  d'une  expérience.

→  Permettre  aux  élèves  de  faire  un  premier  classement  qualitatif  de

diverses  substances  simplement  en  les  touchant  ou  en  les  goûtant.

→  Superposer  les  courbes  de  différents  produits  dans  un  même  graphique

et  se  servir  des  observations  ainsi  possibles  pour  classer  les  substances.

(Utiliser  une  légende  pour  distinguer  les  produits.)

→  S'intéresser  également  au  temps  et  réaliser  une  petite  expérience  qui

permette  de  calculer  le  degré  de  viscosité  en  cm/s:  laisser  glisser  la

substance  sur  une  planche  recouverte  de  papier  d'aluminium.

Considérer  des  intervalles  de  temps  égaux  et  mesurer  les  distances

parcourues  par  les  produits  ou  le  contraire,  considérer  des  intervalles

de  distances  égaux  et  mesurer  le  temps  nécessaire  à  la  substance  pour

franchier  ces  distances.  Vérifier  si  les  valeurs  obtenues  constituent

une  propriété  caractéristique  de  la  substance.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 131

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 132

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**Énoncé du problème**

**SITUATION 18 - LE PARCOMÈTRE**

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

Plusieurs  municipalités,  dans  le  but  d'avoir  des  sources  de  revenus

supplémentaires,  font  installer  des  parcomètres  sur  les  rues  les  plus

achalandées.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  durée  de  stationnement,  le

coût  de  stationnement.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Informations en vrac**

♦ Pour  stationner  dans  un  secteur  où  il  y  a  des  parcomètres  dans  les  rues,  il  en

coûte  0,25$  par  période  de  15  minutes  jusqu'à  un  maximum  de  deux  heures

à  la  fois.

♦ Certains  stationnements  ont  également  des  parcomètres  qui  permettent  le

stationnement  pour  des  durées  supérieures  à  deux  heures  et  qui  offrent

parfois  des  tarifs  spéciaux  :  8$  pour  la  journée,  par  exemple.

♦ Certains  parcomètres  ont  des  heures  d'utilisation  prédéfinies.  Ainsi,  il  est

possible  que  le  stationnement  soit  gratuit  après  18h00.

♦ Exemple  de  situations  analogues  :  location  de  bicyclette  ou  d'outils.  Il  est

possible  que  la  personne  qui  offre  le  service  de  location  exige  un  dépôt.

→  Prolongement,  possiblement  en  devoir,  de  la  situation*:  la  course  en*

*taxi.*

→  Modifier  le  type  de  parcomètre  (certaines  idées  se  trouvent  dans  la

rubrique  "Informations  en  vrac"  ci-contre  ou  encore  supposer  qu'il

restait  un  certain  nombre  de  minutes  à  la  personne  qui  vous  a  précédé

et  que  vous  pouvez  bénéficier  de  ce  temps.  Examiner  les  différences

entre  les  représentations  graphiques.

→  Il  est  possible  de  faire  un  certain  travail  sur  les  paramètres. Par

exemple,  s'il  s'agit  du  stationnement  d'une  marina,  il  est  possible  que  le

conducteur  doive  utiliser  deux  places:  une  pour  sa  voiture  et  une  autre

pour  la  remorque  de  son  bateau.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 133

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

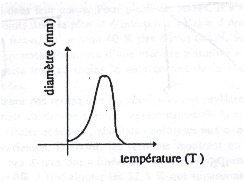
MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 134

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**SITUATION 19 - LA POPULATION DE BACTÉRIES**

**Énoncé du problème**

Un  chercheur  observe  l'évolution  de  colonies  de  bactéries.

Il  s'intéresse  aux  grandeurs  suivantes  :  la  taille  de  la  population  de  bactéries

(diamètre  de  la  tache),  la  température.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elle?

**Avantages d'utiliser cette situation**

♦ Elle  met  en  évidence  la  chronique:  les  élèves  croient  que  le  graphique  est

une  courbe  illustrant  la  variation  de  la  colonie  de  bactéries  dans  le  temps.

♦ Chaque  point  de  la  courbe  représente  une  expérience  en  soi.

♦ Elle  permet  une  réelle  réflexion  sur  le  fait  de  relier  les  points  d'un

graphique.

♦ La  situation  relève  du  domaine  scientifique  et  peut  facilement  être  à  la  base

d'une  activité  interdisciplinaire  entre  les  mathématiques  et  les  sciences.

♦ C'est  une  situation  où  la  grandeur  prédominante  est  facilement  identifiable

par  une  réflexion  sur  le  protocole  expérimental  :  il  est  beaucoup  plus  facile

de  contrôler  la  température  que  de  contrôler  le  diamètre  d'une  colonie  de

bactéries.

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

→  Réaliser  l'expérience  en  prenant  quelques  bactéries  qui  existent  de

façon  naturelle  sur  les  parois  internes  de  notre  bouche.

→  Simplement  demander  aux  élèves  d'interpréter  le  graphique  suivant:

**Taille  d'une  population  de  bactéries  selon  la**

**température**

→  Faire  une  réflexion  sur  la  possibilité  de  tracer  un  graphique  de  la  sorte

si  nous  ne  disposons  que  d'une  seule  population  de  bactéries:  si  nous

n'avons  qu'une  seule  colonie  de  bactéries,  nous  ne  pouvons  pas

contrôler  toutes  les  grandeurs  qui  sont  présentes  dans  la  situation  pour

n'observer  que  la  température  et  la  taille  de  la  population  de  bactéries.

En  effet,  nous  ne  pourrions  pas  contrôler  le  temps.  Si  nous  modifions

la  température  à  laquelle  est  exposée  une  population  de  bactéries,  il  y  a

un  certain  temps  qui  s'écoule.  Dans  un  tel  cas,  qu'est-ce  qui  nous  dit

que  le  temps  n'a  pas  eu  un  effet  sur  la  taille  de  la  population?  Pour

fixer  le  temps,  la  seule  solution  possible  est  d'avoir  plusieurs

populations  de  bactéries  exposées  à  des  températures  différentes

durant  une  même  durée.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 135

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 136

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**SITUATION 20 - LE PLONGEUR**

**Énoncé du problème**

Plusieurs  personnes  font  de  la  plongée  comme  passe-temps.

Nous  nous  intéressons  aux  grandeurs  suivantes  :  la  profondeur  à  laquelle  se

trouve  le  plongeur,  le  temps.

Comment  ces  grandeurs  interagissent-elles?

**Avantages  d'utiliser cette situation**

♦ Il  est  possible  d'aller  dans  les  négatifs  puisque  la  profondeur  peut  être  vue

comme  une  hauteur  négative  (sous  le  niveau  de  la  mer).

♦ Les  grandeurs  sont  interchangeables  :  on  peut  contrôler  soit  le  temps,  soit

la  profondeur.  Cependant,  nous  devons  nous  attendre  à  ce  que  les  élèves

choisissent  le  temps  comme  grandeur  prédominante  étant  donné  leur

tendance  à  la  chronique.

♦ Il  est  possible  de  faire  un  certain  travail  sur  les  paramètres  :  quelle

différence  y  a-t-il  sur  le  graphique  si  le  plongeur  plonge  d'un  tremplin  de

trois  mètre  plutôt  que  du  bord  de  l'eau?  Est-ce  que  le  plongeur  nage  sous

l'eau  ou  fait-il  seulement  un  plongeon  et  remonte?  Est-ce  que  le  poids  du

plongeur  a  une  influence  sur  la  profondeur  à  laquelle  il  peut  aller?

♦ Le  titre  est  important  puisque  chaque  plongeon  peut  avoir  une  modélisation

graphique  qui  lui  est  propre.

**Suggestions de façons d'aborder la situation avec les élèves**

→  S'il  y  a  une  piscine  dans  l'école,  pourquoi  ne  pas  réaliser  l'expérience

avec  les  élèves?

→  Faire  un  travail  sur  les  paramètres  en  modifiant  l'endroit  d'où  le

plongeur  saute.

→  Imposer  aux  élèves  de  faire  un  graphique  du  temps  en  fonction  de  la

profondeur  et  de  le  décrire  verbalement.

→  Faire  une  entrevue  avec  une  personne  qui  fait  de  la  plongée  sous-

marine  et  l'interroger  sur  les  profondeurs  auxquelles  elle  peut  aller,  …

→  Comparer  le  graphique  obtenu  avec  celui  de  la  profondeur  en  fonction

de  la  distance  parcourue  et  se  questionner  sur  la  façon  de  les  distinguer

et  de  les  interpréter.  Faire  une  réflexion  sur  l'importance  du  titre  et  de

l'identification  des  axes.

→  Les  élèves  peuvent  travailler  deux  par  deux  :  un  des  élèves  décrit  une

plongée  et  l'autre  tente  de  la  représenter  graphiquement.

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 137

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

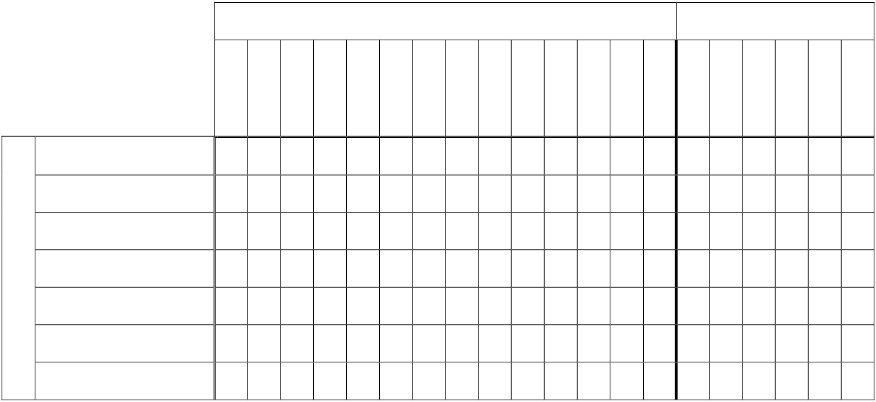
MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 138

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

**INDEX SCHÉMATIQUE DES VARIABLES DIDACTIQUES**

Drapeauduscout

Degrédeviscosité

Traitsurlemur

Température&

altitude

Vol

Paris-Montréal

Étirementd'un

ressort

Courseentaxi

Promenadeen

montagne

Gonflaged'un

ballon

Populationde

bactéries

Locationd'un

outil

Tassedecafé

Eauquibout

Facture

d'électricité

Parcomètre

Bouteille

**Variablesdidactiques**

Plongeur

Ombres

Ch;evre

Cercle

**Situations  détaillées** **Situations  survolées**

Conflit

objet-source/objet-cible               X              X          X              X

Chronique

Numérique  ou  non

Temps  ≠  variable  ind.

X      X      X         X  X  X  X      X  X  X         X

X      X      X      X                 X  X

X

Grandeurs

interchangeables                     X         X     X  X  X  X  X  X     X  X     X

négatives                                                    X     X                 X

ensemble  d'expériences            X                           X            X

Grandeurs

Graphique  représentant  un

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 139

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Situations  fonctionnelles 140

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier

MAT2226  -  Raisonnement  proportionnel  et  concepts  associés

MAT3225  -  Didactique  de  la  variable  et  de  la  fonction

Été  2003  -  Représentation  de  situations  dans  les  différents  modes  (UQAM  -  Cours  MAT-2226  et  MAT-3225)

Bernadette  Janvier  &  François  Pelletier